## Klasa 1. Równania i nierówności

### Zadanie 1

Dane są wyrażenia:

$$7x + 8 \qquad -4x - 8 \qquad 5x + 14 \qquad 2x + 33 \qquad -3x - 10 \qquad 6x + 17$$

Połącz za pomocą znaku równości po dwa z tych wyrażeń tak, aby otrzymać trzy równania, których rozwiązaniami są trzy kolejne liczby naturalne.

### Zadanie 2

Rozwiąż nierówność:

$$1 \cdot (x + 2) + 3 \cdot (x + 4) + \ldots + 99 \cdot (x + 100) < 2 \cdot (x + 1) + 4 \cdot (x + 3) + \ldots + 100 \cdot (x + 99)$$

### Zadanie 3

Liczba chłopców oglądających przedstawienie w szkolnej auli stanowiła 20% liczby dziewcząt. Po zakończonym przedstawieniu 72 dziewczynki wyszły, a kilka pozostało wraz ze wszystkimi chłopcami, aby uporządkować salę. Liczba dziewcząt przebywających w auli stanowiła wtedy 20% liczby wszystkich chłopców. Ile dziewcząt i chłopców razem oglądało to przedstawienie?

### Zadanie 4

Dziadek i babcia mają razem 140 lat. Oznacz przez $x$ wiek babci i zapisz równanie opisujące związek: dziadek ma dwa razy tyle lat, ile miała babcia wtedy, gdy dziadek miał tyle lat, ile babcia ma teraz.

### Zadanie 5

Znajdź trzy różne liczby $a$, $b$, $c$ spełniające równanie:

$$ab + ac + bc = a + b + c$$

### Zadanie 6

Znajdź wszystkie liczby spełniające podwójną równość:

$$\frac{x+2}{2} + \frac{x+3}{3} = \frac{x+2}{6} + \frac{2x+5}{3} = \frac{x-1}{4} + \frac{x+3}{12}$$

### Zadanie 7

Litery $A$, $B$, $C$ w równaniu $Ax + B = C$ należy zastąpić liczbami z zestawu 1, 3, 5, 7, 9 (każdą literę inną liczbą) tak, aby otrzymać równanie, którego rozwiązaniem jest liczba całkowita. Na ile sposobów można to zrobić?

### Zadanie 8

Czy istnieją trzy różne ułamki nieskracalne o liczniku równym 60, których suma jest równa 1?

### Zadanie 9

Rozwiąż równanie: $x - |x| = x^2 - x$.

### Zadanie 10

Niech symbol $)a($ oznacza zaokrąglenie dodatniej liczby $a$ do jedności. Znajdź wszystkie liczby naturalne spełniające równanie:

$$\Big)\tfrac{1}{8}x - \tfrac{1}{4}\Big( = 1$$

## Klasa 2. Statystyka

### Zadanie 1

W tabeli zamieszczono pogrupowane dane dotyczące liczby punktów otrzymanych przez pewną grupę uczniów na sprawdzianie.

| Przedział punktów | 0–2 | 3–5 | 6–8 | 9–11 | 12–14 |
|---|---|---|---|---|---|
| Liczba osób | 4 | 9 | 6 | 8 | 3 |

Czy średnia arytmetyczna liczby punktów uzyskanych przez tych uczniów może być równa:
a) 5,5, b) 6,5, c) 7,5, d) 8,5?

### Zadanie 2

Dany jest zestaw liczb: 2, 8, 9, 4, 3, 9, 5, 6, 4. Którą z liczb należy wykreślić, aby otrzymany zestaw miał taką samą medianę jak zestaw początkowy?

### Zadanie 3

Podaj przykład zestawu 1000 różnych liczb, których średnia arytmetyczna jest równa 1000.

### Zadanie 4

Średnia arytmetyczna liczb $a$, $b$, $c$ jest równa 5. Utworzono zestaw składający się z trzech liczb $a$, trzech liczb $b$ i sześciu liczb $c$. Średnia arytmetyczna tego zestawu także jest równa 5. Oblicz średnią arytmetyczną liczb $a$ i $b$.

### Zadanie 5

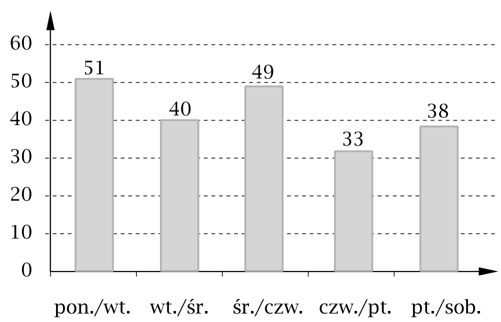
Na wykresie zaznaczono, jak się zmieniała mediana liczby wyrzuconych oczek po kolejnym rzucie kostką do gry. Oblicz średnią arytmetyczną wszystkich czterech wyników.


### Zadanie 6

Na wykresie zaznaczono, jak się zmieniała średnia arytmetyczna liczby wyrzuconych oczek po kolejnym rzucie kostką do gry. Oblicz medianę wszystkich pięciu wyników.


### Zadanie 7

Schronisko ma 60 miejsc noclegowych w pokojach 3-osobowych i 5-osobowych. Pokój jest wynajmowany tylko wówczas, gdy wszystkie miejsca będą w nim zajęte. W pierwszej kolejności są wynajmowane pokoje 5-osobowe. Na diagramie przedstawiono liczby osób nocujących w tym schronisku w poszczególne dni tygodnia, od poniedziałku do soboty. Ile pokoi 5-osobowych i ile 3-osobowych jest w tym schronisku?

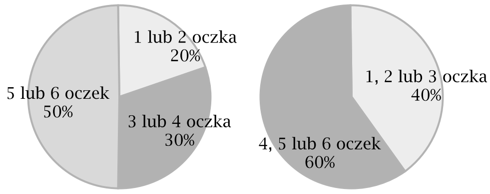


## Zadanie 8

Podaj przykładowy zestaw 5 różnych liczb, których mediana jest równa medianie zestawu kwadratów tych liczb.

## Zadanie 9

Wykonano 30 rzutów kostką do gry. Wyniki pogrupowano na dwa sposoby i przedstawiono na diagramach. Uzasadnij, że średnia arytmetyczna wszystkich wyników po zaokrągleniu do jedności jest równa 4.




## Zadanie 10

Kasia ma sześcienną kostkę, taką że na dwóch jej ścianach są po 2 oczka, na dwóch – po 4 oczka i na pozostałych dwóch – po 6 oczek. Dziewczynka wykonała tą kostką 9 rzutów i otrzymała zestaw wyników, którego mediana wynosi 4. Po dziesiątym rzucie mediana się zwiększyła. Uzasadnij, że średnia arytmetyczna liczby wyrzuconych oczek w dziesięciu rzutach **nie** jest większa od ich mediany.

## Klasa 3. Matematyka w zastosowaniach

### Zadanie 1

W pewnej pizzerii pizza hawajska o średnicy 30 cm kosztuje 36 zł, a o średnicy 20 cm kosztuje 24 zł. Którą z nich bardziej opłaca się kupić, jeśli dodatki są rozkładane równomiernie?

### Zadanie 2

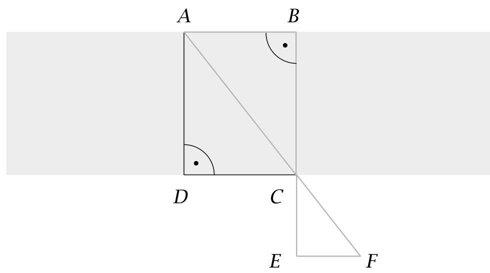
Przyjmijmy, że pomarańcze są kulami, a skórka ma grubość 0,5 cm. W którym przypadku możemy uzyskać więcej soku: po wyciśnięciu go z dwóch pomarańczy o średnicy 8 cm czy jednej – o średnicy 11 cm?

### Zadanie 3

Firma W&J sprzedawała pewien towar, którego cena wraz z podatkiem VAT w wysokości 7% była równa 684,80 zł. Od dziś sprzedaje ten towar o 7% taniej, a obniżkę ceny reklamuje hasłem: „Sprzedajemy towar taniej o VAT". Czy hasło reklamowe jest zgodne z dokonaną obniżką ceny?

### Zadanie 4

Wojtek chciał ustalić szerokość kanału. Niestety, w okolicy nie było żadnego mostu. Wykonał więc następujące czynności:

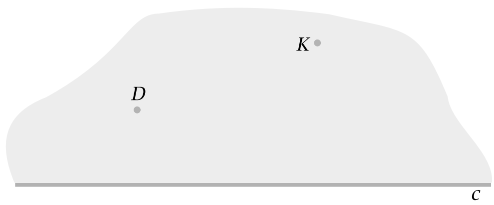



- przy drugim brzegu rzeki znalazł dwa obiekty – $A$ i $B$,
- na brzegu, przy którym stał, wyznaczył naprzeciwko punktów $A$ i $B$ odpowiednio punkty $D$ i $C$,
- wychodząc z punktu $C$, odszedł od brzegu do punktu $E$ leżącego na przedłużeniu odcinka $BC$,
- wychodząc z punktu $C$, odszedł od brzegu do punktu $F$ leżącego na przedłużeniu odcinka $AC$ tak, żeby odcinek $EF$ był równoległy do brzegu kanału,
- zmierzył następujące odcinki: $|DC| = 6$ m, $|EC| = 4$ m, $|FC| = 5$ m.

Jaką szerokość ma kanał?

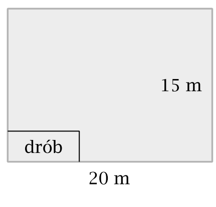
### Zadanie 5

Wzdłuż trawnika, na którym rośnie dąb ($D$) i klon ($K$), przebiega prostoliniowy chodnik ($c$). Postanowiono wygrodzić na tym trawniku plac zabaw, który będzie miał kształt trójkąta o dwóch wierzchołkach $D$ i $K$ oraz trzecim znajdującym się bezpośrednio przy chodniku, gdzie będzie wejście. W którym miejscu chodnika należy umieścić wejście ($W$), aby długość ogrodzenia była jak najmniejsza?




### Zadanie 6

W narożu prostokątnej ogrodzonej łąki gospodarz chce wydzielić prostokątną część dla drobiu w sposób przedstawiony na rysunku.
Ma do dyspozycji ogrodzenie o długości 10 m. Jak powinien je ustawić, aby ogrodzony obszar miał jak największe pole powierzchni?



## Zadanie 7

Na drodze biegnącej w linii prostej jest 6 skrzyżowań znajdujących się co 200 m. Aby usprawnić ruch samochodów na tej drodze, postanowiono umieścić przy każdym skrzyżowaniu kamerę i każdą z nich połączyć oddzielnym kablem z centrum sterowania ruchem. Gdzie należy umieścić to centrum, aby zużyć jak najmniej kabla?

## Zadanie 8

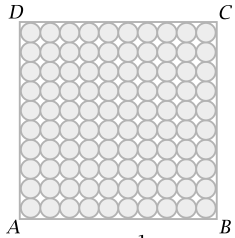
Ciastka sprzedawane są po $a$ złotych za paczkę o masie $x$ dag. Firma, która je produkuje, chce zwiększyć o $p$% masę ciastek przy niezmienionej cenie albo pozostawić niezmienioną masę, ale o $p$% obniżyć cenę jednej paczki. Która z tych zmian jest bardziej korzystna dla klienta?

## Zadanie 9

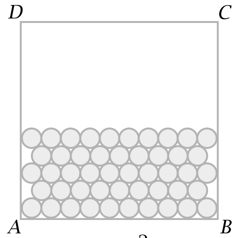
Fabryka produkująca latawce podwyższyła cenę latawca o $p$%, co spowodowało spadek liczby sprzedawanych miesięcznie sztuk także o $p$%. Czy po takiej zmianie ceny fabryka odnotowała większy miesięczny przychód niż przed podwyżką?

## Zadanie 10

W skrzynce, której dno jest kwadratem o boku 1 m, umieszczono 100 puszek o średnicy 10 cm, układając je tak jak na rysunku 1 (widok z góry). Czy ułożenie puszek tak jak na rysunku 2, pozwoli zmieścić w tej skrzynce więcej puszek?



rys. 1



rys. 2

**Zadania dla zdolnych gimnazjalistów, cz. 5 – odpowiedzi i szkice rozwiązań**

## Klasa 1. Równania i nierówności

### Zadanie 1

Jedną parę wyrażeń utworzą $-4x - 8$ i $-3x - 10$, bo tylko te wyrażenia przyjmują wartości ujemne dla $x$ będącego liczbą naturalną.

$-4x - 8 = -3x - 10$
$x = 2$

Pozostałe równania to:

$5x + 14 = 7x + 8$ (rozwiązanie: $x = 3$)
$2x + 33 = 6x + 17$ (rozwiązanie: $x = 4$)

### Zadanie 2

$x > 0$

### Zadanie 3

Oznaczmy: $x$ – liczba chłopców oglądających przedstawienie, $5x$ – liczba dziewcząt oglądających przedstawienie. Wówczas:

$5x - 72 = 0{,}2x$
$x = 15,\quad 5x = 75$

Przedstawienie oglądało razem 90 chłopców i dziewcząt.

### Zadanie 4

Oznaczmy: $x$ – wiek babci, $140 - x$ – wiek dziadka. Wtedy:
$140 - x = 2\,\{x - [(140 - x) - x]\}$

### Zadanie 5

Na przykład: $a = 1$, $b = 2$, $c = \frac{1}{2}$.

### Zadanie 6

$x = -4$

### Zadanie 7

Zauważmy, że $x = \frac{C-B}{A}$. Otrzymamy 14 różnych równań spełniających warunki zadania.

### Zadanie 8

Przypuśćmy, że istnieją trzy różne ułamki nieskracalne, których suma jest równa 1:

$\frac{60}{x} + \frac{60}{y} + \frac{60}{z} = 1$ ($x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$)

$60(xy + xz + yz) = xyz$

Lewa strona równania jest parzysta, więc prawa strona też jest parzysta, czyli jedna z liczb $x$, $y$, $z$ jest parzysta. Ułamek mający w mianowniku tę liczbę jest skracalny wbrew założeniu z zadania. Zatem nie istnieją takie trzy ułamki.

### Zadanie 9

Zauważmy, że liczba 0 spełnia to równanie.
Jeśli $x < 0$, to lewa strona równania jest ujemna, a prawa – dodatnia, więc żadna liczba ujemna nie spełnia tego równania.
Jeśli $x > 0$, to lewa strona równania jest równa 0, czyli mamy:
$x^2 - x = 0$
$x(x - 1) = 0$
$x = 0$ lub $x = 1$
Jedynymi liczbami spełniającymi to równanie są 0 i 1.

### Zadanie 10

6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13

**Klasa 2. Statystyka**

**Zadanie 1**
Średnia $s$ spełnia warunek $5{,}7 \leqslant s \leqslant 7{,}7$.
a) nie, b) tak, c) tak, d) nie.

**Zadanie 2**
Należy wykreślić liczbę 5.

**Zadanie 3**
Na przykład: 999, 1001, 998, 1002, …, 500, 1500.

**Zadanie 4**
$a + b + c = 15$
$3a + 3b + 6c = 60$
Zatem $c = 5$. Stąd $a + b = 10$, czyli $\frac{a+b}{2} = 5$.

**Zadanie 5**
5,5

**Zadanie 6**
4

**Zadanie 7**
Z faktu, że w schronisku nocowało 51 osób, wynika, że jest tam co najmniej 9 pokoi 5-osobowych. Ponieważ schronisko ma 60 miejsc noclegowych, więc więcej pokoi 5-osobowych być tam nie może. Zatem w tym schronisku jest dziewięć pokoi 5-osobowych i pięć pokoi 3-osobowych.

**Zadanie 8**
Wystarczy wziąć pięć różnych liczb dodatnich i takich, że trzecia co do wielkości jest równa 1.

**Zadanie 9**
Średnia $s$ spełnia warunek $3{,}7 \leqslant s \leqslant 4{,}4$, więc po zaokrągleniu do jedności jest równa 4.

**Zadanie 10**
Mediana wszystkich 10 wyników jest równa 5. Średnia tych wyników nie jest większa niż $\frac{5 \cdot 4 + 4 \cdot 6}{2} = 5$.

**Klasa 3. Matematyka w zastosowaniach**

**Zadanie 1**
$1\,\text{cm}^2$ dużej pizzy kosztuje:

$\frac{36}{\pi\cdot 15^2} = \frac{0{,}16}{\pi}$ [zł]

$1\,\text{cm}^2$ małej pizzy kosztuje:

$\frac{24}{\pi\cdot 10^2} = \frac{0{,}24}{\pi}$ [zł]

Bardziej opłaca się kupić dużą pizzę.

**Zadanie 2**
Dwie mniejsze pomarańcze bez skórki mają razem objętość:

$2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 4^3 = \frac{512}{3}\pi \approx 536$ [cm$^3$]

Jedna większa pomarańcza bez skórki ma objętość:

$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5{,}5^3 = \frac{1331}{6}\pi \approx 697$ [cm$^3$]

Zatem z jednej większej pomarańczy można uzyskać więcej soku niż z dwóch mniejszych.

**Zadanie 3**
Oznaczmy: $x$ – pierwotna cena towaru bez podatku VAT. Wtedy:
$1{,}07x$ – pierwotna cena towaru z podatkiem VAT
$0{,}93 \cdot 1{,}07x$ – cena towaru z VAT po obniżce o 7%

$0{,}93 \cdot 1{,}07x = 0{,}9951x < x$

Obniżka ceny o 7% sprawia, że cena jest niższa od pierwotnej ceny bez VAT.

**Zadanie 4**
Trójkąty $ABC$ i $EFC$ są podobne i $|AB| = |DC|$. Stąd:

$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|EF|}{|EC|}$, czyli $|BC| = \frac{|AB|\cdot|EC|}{|EF|}$.

$|EF| = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ [m]

$|BC| = \frac{6\cdot 4}{3} = 8$ [m]

**Zadanie 5**
Suma $|DW| + |WK|$ będzie najmniejsza, gdy $W$ będzie punktem przecięcia się prostej $c$ z odcinkiem $D'K$, gdzie $D'$ jest punktem symetrycznym do $D$ względem prostej $c$.

**Zadanie 6**
Suma długości dwóch boków prostokąta ma być równa 10 metrów. Przyjmijmy, że jeden bok ma $(5 + x)$ metrów, a drugi $(5 - x)$ metrów, gdzie $x$ jest liczbą spełniającą warunek $0 < x < 5$. Pole tego prostokąta jest więc równe:

$(5 - x)(5 + x) = (25 - x^2)$

Pole to będzie największe, gdy $x^2$ przyjmie najmniejszą wartość, czyli $x = 0$. Gospodarz powinien wydzielić część w kształcie kwadratu o boku długości 5 m.

**Zadanie 7**
Oznaczmy kolejne skrzyżowania przez $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$, $S_5$, $S_6$. Umieszczenie centrum poza odcinkiem $S_1S_6$ sprawia, że potrzeba co najmniej $15 \cdot 200 = 3000$ m kabla. Umieszczenie centrum na odcinku $S_1S_2$ lub $S_5S_6$ wymaga użycia co najmniej $11 \cdot 1200 = 2200$ m kabla, a między skrzyżowaniami $S_2$ i $S_3$ albo $S_4$ i $S_5$ – ponad $9 \cdot 200 = 1800$ m kabla. Centrum sterowania ruchem należy zatem umieścić na odcinku $S_3S_4$ – wtedy wystarczy $9 \cdot 200 = 1800$ m kabla.

**Zadanie 8**

I sposób zmiany:

$\left(x + \frac{p}{100}x\right)$ dag kosztuje $a$ zł, czyli 1 dag kosztuje $c_I = \frac{100a}{(100+p)x}$ zł.

II sposób zmiany:

$x$ dag kosztuje $a - \frac{a}{100}p = \frac{100-p}{100}a$ zł, czyli 1 dag kosztuje $c_{II} = \frac{100-p}{100x}a$ zł.

$\frac{c_I}{c_{II}} = \frac{100a}{(100+p)x} \cdot \frac{100x}{(100-p)a} = \frac{10000}{10000-p^2} > 1$

Drugi sposób zmiany jest bardziej korzystny dla klienta.

**Zadanie 9**

Oznaczmy: $c$ – cena jednego latawca, $n$ – liczba sprzedanych sztuk.
Przychód przed zmianą ceny latawca:

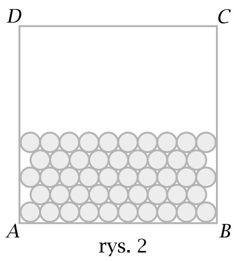
$c \cdot n$

Przychód po zmianie ceny latawca:

$\left(c + \frac{p}{100} \cdot c\right)\left(n - \frac{p}{100} \cdot n\right) = cn - 0{,}0001p^2 \cdot cn$

Jeśli $p > 0$, to otrzymany wynik jest mniejszy od $cn$, czyli przychód po zmianie ceny jest mniejszy niż przed wprowadzeniem zmiany.

**Zadanie 10**




rys. 2

Oznaczmy przez $d$ odległość punktu na puszce stojącej w dziesiątym rzędzie (licząc od $AB$) położonego najdalej od boku $AB$. Wówczas:

$d = 2 \cdot 5 + 9 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{2} \approx 87{,}9$ [cm]

W dziesięciu rzędach stoi $5 \cdot 19 = 95$ puszek. Ponieważ $d < 90$, zmieści się tam jeszcze jedenasty rząd, czyli w skrzynce można ustawić więcej niż 100 puszek.