KLASA 1. LICZBY I DZIAŁANIA

Zadanie 1

W zapisie obok zmień jedną cyfrę w każdym miejscu, w którym ona występuje, na inną, za każdym razem tę samą cyfrę, tak aby uzyskać zapis poprawnego mnożenia pisemnego.

$$\begin{array}{r} 42 \\ \cdot\ 49 \\ \hline 734 \\ 656 \\ \hline 7294 \end{array}$$

Zadanie 2

Zapis postaci $\overline{XYZ}$ oznacza liczbę o cyfrze setek X, cyfrze dziesiątek Y i o cyfrze jedności Z. Jakie cyfry oznaczono literami A, B, C, D, E, F w następujących zapisach:

a) $(\overline{AA})^B = \overline{ABA}$,

b) $(\overline{CCC})^D = \overline{CDEFEDC}$?

Zadanie 3

Wojtek i Jurek jednocześnie wyruszyli na drogę z Asina do Kasina. Jurek szedł całą drogę ze stałą prędkością, a Wojtek pierwszą połowę drogi szedł dwukrotnie wolniej od Jurka, a drugą połowę – dwukrotnie szybciej od niego. Który z chłopców wcześniej dojdzie do Kasina? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4

Znajdź wszystkie liczby pierwsze, które można zapisać w systemie rzymskim za pomocą dwóch znaków.

Zadanie 5

a) Podaj największą liczbę złożoną trzycyfrową n, której wszystkie dzielniki, oprócz 1 i n, są liczbami dwucyfrowymi.

b) Podaj najmniejszą liczbę złożoną czterocyfrową m, której wszystkie dzielniki, oprócz 1 i m, są liczbami dwucyfrowymi.

Zadanie 6

Ile jest par liczb dwucyfrowych, których średnia arytmetyczna jest równa 22? Par różniących się kolejnością liczb nie uważamy za różne.

Zadanie 7

Wojtek wypisał liczby według następującej reguły: najpierw napisał liczbę 5, a kolejne liczby otrzymywał, dodając do ostatnio napisanej liczby na przemian 3 i 7:

$$5,\ 8,\ 15,\ 18,\ 25,\ 28,\ \ldots$$

Po zapisaniu kilkunastu liczb postawił pytanie: Na którym miejscu po raz pierwszy pojawi się liczba czterocyfrowa? Odpowiedz na pytanie Wojtka.

Zadanie 8

Znajdź wszystkie liczby dwucyfrowe o następującej własności: czwarta potęga sumy cyfr tej liczby jest równa sumie cyfr czwartej potęgi tej liczby.

Zadanie 9

Prostokąt o wymiarach 8 cm i $2\frac{2}{3}$ cm ma tę własność, że jego obwód i pole wyraża się tą samą liczbą odpowiednich jednostek.

a) Sprawdź to.

b) Pewien prostokąt o szerokości $3\frac{1}{3}$ cm ma również taką własność. Jaka jest długość tego prostokąta?

Zadanie 10

Znajdź pięć kolejnych liczb nieparzystych, wśród których nie ma liczby pierwszej.

KLASA 2. POTĘGI I PIERWIASTKI

Zadanie 1

Znajdź wszystkie liczby naturalne, których dziewiąta potęga jest dziewięciocyfrowa, a jej zapis dziesiętny kończy się cyfrą 9.

Zadanie 2

Liczba 134 217 216 jest iloczynem trzech kolejnych liczb naturalnych, których średnia arytmetyczna jest potęgą liczby 2. Podaj te liczby.

Zadanie 3

Czy istnieje liczba całkowita dodatnia k, taka że wartość wyrażenia $2^k + 4^{555}$ jest kwadratem liczby naturalnej? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4

Uzasadnij, że jeśli n jest liczbą naturalną większą od 1, to cyfrą dziesiątek liczby 7^n jest 0 lub 4.

Zadanie 5

Czy istnieje taka liczba rzeczywista x, dla której wyrażenie: $\sqrt{x-5} + \sqrt{x+11} + \sqrt{x+4}$ ma wartość mniejszą od 7?

Zadanie 6

Która z dwóch liczb jest większa: $\sqrt{10} - 3$ czy $\sqrt{50} - 7$?

Zadanie 7

Która liczba jest większa: x czy y, skoro $x = \sqrt{999\,999\,999}$, a $y = \sqrt[3]{1\,111\,111\,111\,111\,111}$?

Zadanie 8

Uzasadnij, że podana niżej liczba jest całkowita.

$$(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2}) - \sqrt{2} + \sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}$$

Zadanie 9

Liczba 27 ma tę własność, że pierwiastek sześcienny z niej jest równy pierwiastkowi kwadratowemu z sumy cyfr tej liczby, czyli $\sqrt[3]{27} = \sqrt{2+7}$. Znajdź wszystkie liczby dwucyfrowe o tej własności.

Zadanie 10

Uzasadnij, że jeśli a i b są dodatnimi liczbami całkowitymi oraz $a^2 + a = 3b^2$, to wartość wyrażenia $\sqrt{12b^2+1}$ jest także liczbą całkowitą dodatnią.

KLASA 3. LICZBY I WYRAŻENIA

Zadanie 1

Dodano najmniejszą liczbę mającą $n-1$ cyfr (n – liczba naturalna, $n>1$) i największą mającą $n+1$ cyfr. Otrzymany wynik jest liczbą, której suma cyfr jest równa 55. Oblicz n.

Zadanie 2

W liczbie dziesięciocyfrowej, w której każda cyfra jest inna, zamieniono miejscami dwie z nich. Otrzymano liczbę mniejszą o 7,2 miliarda. Jakie cyfry zamieniono miejscami i na których pozycjach one stały?

Zadanie 3

Znajdź cztery kolejne liczby naturalne, których suma odwrotności ma rozwinięcie dziesiętne skończone.

Zadanie 4

Niech a i b będą różnymi liczbami dodatnimi. Czy istnieje liczba x spełniająca równanie

$$\frac{a}{x}-\frac{x}{a}=\frac{b}{x}-\frac{x}{b}$$

Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 5

Wykaż, że dla dowolnych różnych od zera trzech liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność:

$$\frac{a^2+b^2}{c^2}+\frac{b^2+c^2}{a^2}+\frac{c^2+a^2}{b^2}\geqslant 6$$

Zadanie 6

Niech p będzie liczbą naturalną. Obliczyłem $p\%$ z pewnej liczby pięciocyfrowej. Potem z otrzymanego wyniku znów obliczyłem $p\%$, a z uzyskanej w ten sposób liczby – ponownie obliczyłem $p\%$. W wyniku tych operacji otrzymałem 1. Oblicz p.

Zadanie 7

Uzasadnij, że dla każdego n będącego liczbą naturalną liczba

$$1\underbrace{00\ldots0}_{n\ zer}2\underbrace{00\ldots0}_{n\ zer}1$$

jest złożona.

Zadanie 8

Uzasadnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność:

$$\frac{a^2+b^2+c^2+3}{a+b+c}\geqslant 2$$

Zadanie 9

Uzasadnij, że suma cyfr liczby trzycyfrowej stanowi mniej niż 10% tej liczby.

Zadanie 10

Niech k, l, m będą kolejnymi liczbami całkowitymi, takimi że $k+l+m\neq 0$. Uzasadnij, że wyrażenie

$$\frac{k^2+l^2+m^2}{(k+l+m)^2}-\frac{k^3+l^3+m^3}{(k+l+m)^3}$$

przyjmuje zawsze tę samą wartość.

Zadania dla zdolnych gimnazjalistów, cz. 1 – odpowiedzi i szkice rozwiązań

Klasa 1. Liczby i działania

1. Cyfrę 4 należy zamienić na cyfrę 8.

2. a) $11^2 = 121$, b) $111^3 = 1\,367\,631$.

3. Do Kasina dojdzie wcześniej Jurek. Wojtek będzie wtedy w połowie drogi.

4. II = 2, XI = 11, CI = 101, ID = 499.

5. a) $989 = 23 \cdot 43$, b) $1003 = 17 \cdot 59$.

6. 22 i 22, 21 i 23, ..., 10 i 34. Takich par jest 13.

7. Liczby stojące na miejscach nieparzystych są postaci $5n$, gdzie n jest numerem miejsca. Na miejscu 199 pojawi się liczba $5 \cdot 199 = 995$. Kolejna liczba to: $995 + 3 = 998$. Po raz pierwszy liczba czterocyfrowa pojawi się więc na miejscu 201.

8. Czwarta potęga liczby dwucyfrowej jest mniejsza od 100 000 000, więc suma jej cyfr jest mniejsza od $8 \cdot 9 = 72$. Suma cyfr szukanej liczby jest mniejsza niż 3, bo $3^4 = 81 > 72$. Liczbami dwucyfrowymi o takiej sumie są: 20, 11, 10. Warunki zadania spełniają 10 i 11.

9. 5

10. Szukanymi liczbami są na przykład: $6930 + 3 = 3 \cdot 2311$, $6930 + 5 = 5 \cdot 1387$, $6930 + 7 = 7 \cdot 991$, $6930 + 9 = 9 \cdot 771$, $6930 + 11 = 11 \cdot 631$ $(6930 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11)$.

Klasa 2. Potęgi i pierwiastki

1. 9

2. 511, 512, 513 (Wskazówka: daną liczbę należy dzielić przez 2 aż do uzyskania liczby nieparzystej).

3. Dla $k = 1113$ mamy: $2^{1113} + 4^{555} = (2^3 + 1) \cdot 2^{1110} = 9 \cdot 2^{1110} = (3 \cdot 2^{555})^2$.

4. Ostatnie dwie cyfry (cyfra dziesiątek i jedności) zapisu dziesiętnego w kolejnych potęgach liczby 7 występują okresowo: 49, 43, 01, 07, 49, 43, 01, 07, ...

5. Liczba $\sqrt{x-5} + \sqrt{x+11} + \sqrt{x+4}$ jest określona dla $x \geqslant 5$. Wtedy: $x + 4 \geqslant 9$, czyli $\sqrt{x+4} \geqslant 3$. Ponadto: $x + 11 \geqslant 16$, czyli $\sqrt{x+11} \geqslant 4$. Zatem wyrażenie z zadania ma wartość większą lub równą 7.

6. $\sqrt{10} > 3{,}1$, bo $3{,}1^2 = 9{,}61$
$\sqrt{50} < 7{,}1$, bo $7{,}1^2 = 50{,}41$
Zatem $\sqrt{10} - 3 > \sqrt{50} - 7$.

7. Zauważmy, że $x < 100\,000$, a $y > 100\,000$, więc $x < y$.

8. Podana w zadaniu liczba jest równa 2.

9. Oznaczmy: x – cyfra dziesiątek szukanej liczby, s – suma cyfr szukanej liczby. Wtedy:
$\sqrt[3]{9x + s} = \sqrt{s}$
$(9x + s)^2 = s^3$
Aby ta równość była prawdziwa, liczba s musi być kwadratem liczby naturalnej. Ponieważ $s \leqslant 2 \cdot 9 = 18$, więc $s = 16$, $s = 9$, $s = 4$ lub $s = 1$. Jedynie $s = 9$ spełnia warunki zadania, więc rozwiązanie podane w zadaniu jest jedyne.

10. $\sqrt{12b^2 + 1} = \sqrt{4\,(a^2 + a) + 1} = \sqrt{(2a + 1)^2} = |2a + 1|$

Klasa 3. Liczby i wyrażenia

1. $n = 8$

2. Zamieniono miejscami 9 i 1 (9 była cyfrą miliardów, a 1 – setek milionów).

3. $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = 0{,}95$

4. $\frac{a}{x} - \frac{x}{a} = \frac{b}{x} - \frac{x}{b} \quad | \cdot abx$

$a^2b - ab^2 = ab^2 - ax^2$

$(a-b)(ab + x^2) = 0$

Ponieważ $a \neq b$, więc $ab + x^2 = 0$, czyli $x^2 = -ab$. Liczby a i b są dodatnie, zatem nie istnieje liczba x spełniająca dane równanie.

5. Pokażemy, że $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geqslant 2$. Po przekształceniach otrzymamy: $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2 \geqslant 0$, co jest zawsze prawdziwe. Analogicznie uzasadnić można, że: $\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2} \geqslant 2$ oraz $\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2} \geqslant 2$. Po dodaniu stronami tych trzech nierówności otrzymamy nierówność z zadania.

6. Niech x będzie liczbą pięciocyfrową opisaną w zadaniu. Mamy $\left(\frac{p}{100}\right)^3 \cdot x = 1$. Po kilku przekształceniach i analizie równości otrzymujemy $p = 4$.

7. $1\underbrace{00\ldots0}_{n\ zer}2\underbrace{00\ldots0}_{n\ zer}1 = (1\underbrace{00\ldots0}_{n\ zer}1)^2$

8. $\frac{a^2+b^2+c^2+3}{a+b+c} \geqslant 2$

$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geqslant 2(a+b+c)$

$(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geqslant 0$

9. Niech x, y, z – cyfry odpowiednio setek, dziesiątek i jedności. Wtedy:

$x + y + z < 0{,}1(100x + 10y + z)$, czyli $z < 10x$.

10. $\frac{(l-1)^2+l^2+(l+1)^2}{9l^2} - \frac{(l-1)^3+l^3+(l+1)^3}{27l^3} = \frac{3l^2+2}{9l^2} - \frac{3l^3+6l}{27l^3} = \frac{6l^3}{27l^3} = \frac{2}{9}$.