Klasa 1. Procenty

Zadanie 1

Jaki procent wszystkich trzycyfrowych wielokrotności liczby 5 stanowią trzycyfrowe wielokrotności liczby 25?

Zadanie 2

Długość pewnego prostopadłościanu zmniejszono o 20%, jego szerokość – o 25%, a wysokość – o 50%. Otrzymano sześcian o polu powierzchni równym $864\,\text{cm}^2$. Jakie pole powierzchni miał początkowy prostopadłościan?

Zadanie 3

Krawędź pewnego sześcianu zmniejszono o pewien procent i otrzymano sześcian, którego pole powierzchni jest mniejsze o 36%.

a) O ile procent zmniejszono krawędź tego sześcianu?

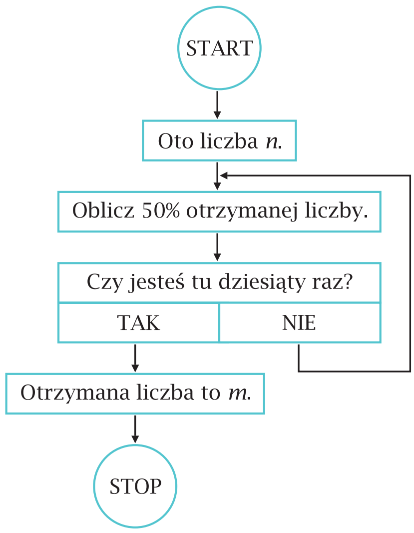
b) O ile procent jest mniejsza objętość otrzymanego sześcianu?

Zadanie 4

Do syropu cukrowego o stężeniu 60% dolano tyle wody, że otrzymano roztwór, w którym woda stanowi 60%. O ile procent wzrosła masa tego roztworu?

Zadanie 5

Wojtek wykonał czynności opisane na schemacie przedstawionym obok. Zaczął od pewnej liczby naturalnej n i otrzymał liczbę naturalną m. Uzasadnij, że liczba n jest większa od 1000.



Zadanie 6

Pan Wojciech przejechał tę samą trasę co pan Jerzy ze średnią prędkością o 10% większą od średniej prędkości pana Jerzego. O ile procent czas przejazdu pana Wojciecha był krótszy niż czas przejazdu pana Jerzego?

Zadanie 7

Do roztworu soli kuchennej o stężeniu $p\%$ wlano tyle wody, że masa roztworu zwiększyła się o $q\%$. Ile jest teraz równe stężenie tego roztworu?

Zadanie 8

Uzasadnij, że jeśli liczba trzycyfrowa jest podzielna przez 9, to suma jej cyfr stanowi ponad 9‰ tej liczby.

Zadanie 9

Uzasadnij, że średnia arytmetyczna pięciu dodatnich liczb jest większa niż 20% największej z tych liczb.

Klasa 2. Wyrażenia algebraiczne i układy równań

Zadanie 1

Znajdź wszystkie trójki p, q, r dodatnich liczb naturalnych spełniające równanie $pqr + pq + p = 15$.

Zadanie 2

W każdym z dwóch pojemników jest 300 kul. W pierwszym pojemniku kule białe stanowią 20% wszystkich kul, a w drugim pojemniku – 30%. Czy można przełożyć pewną liczbę białych kul z drugiego pojemnika do pierwszego, tak aby procent kul białych w obu pojemnikach był taki sam? Zapisz potrzebne obliczenia.

Zadanie 3

Liczby x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 są rozwiązaniami układu równań:

$$\begin{cases} 5x_5 + 4x_4 + 3x_3 + 2x_2 + x_1 = \sqrt{2} \\ 4x_5 + 3x_4 + 2x_3 + x_2 = \sqrt{2} \\ 3x_5 + 2x_4 + x_3 = \sqrt{2} \\ 2x_5 + x_4 = \sqrt{2} \end{cases}$$

Uzasadnij, że co najmniej dwie z nich są równe 0.

Zadanie 4

Uzasadnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzą następujące nierówności:

a) $\frac{1}{a+b} < \frac{1}{a}$

b) $\frac{3}{a+b+c} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Zadanie 5

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} (1 + \sqrt{-x})^2 + y = (1 + \sqrt{-y})^2 + x \\ (1 - \sqrt{y})^2 + x = (1 - \sqrt{x})^2 + y \end{cases}$$

Zadanie 6

Układ równań $\begin{cases} |x| + |y| = 32 \\ |x - y| = 23 \end{cases}$ spełniają cztery pary liczb. Uzasadnij, że żadna z tych par nie składa się z dwóch liczb całkowitych.

Zadanie 7

Uzasadnij, że jeśli w wyrażeniu

$(a + b)^2 + (c + d)^2 + 2(a + b)(c + d)$

zamienimy miejscami jakiekolwiek dwie spośród liczb a, b, c, d, to wartość tego wyrażenia się nie zmieni.

Zadanie 8

Rozwiąż układ równań: $\begin{cases} x(2 - y) = 1 \\ y(2 - x) = 1 \end{cases}$

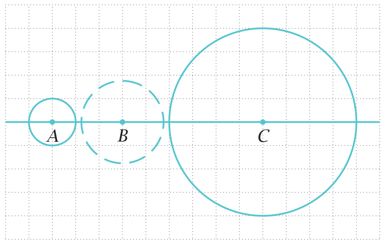
Zadanie 9

W roztworze ilość substancji rozpuszczonej zwiększono o p%, a ilość wody – zmniejszono o p%. Otrzymano roztwór o stężeniu dwukrotnie większym niż początkowe i o masie o p% mniejszej. Oblicz p.

Klasa 3. Funkcje

Zadanie 1

Punkty A, B, C leżą na prostej, przy czym $AB = 3$, a $BC = 6$ (zob. rysunek obok). Punkt A jest środkiem okręgu o promieniu 1, a punkt C – okręgu o promieniu 4. Rysujemy okręgi o środku w punkcie B i promieniu x. Sporządź wykres funkcji, która promieniowi x przypisuje liczbę punktów przecięcia okręgu o środku B i promieniu x z dwoma pozostałymi okręgami.



Zadanie 2

Podaj wszystkie punkty należące do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, których obie współrzędne są całkowite.

Zadanie 3

Narysuj wykres funkcji, która liczbie 0 przyporządkowuje wartość 0, a argumentowi $x \neq 0$ – większą z liczb x i $-x$.

Zadanie 4

Uzasadnij: jeżeli funkcja $f(x) = (x-1)(x+2) + (x+2)(x-3) + (x-3)(x+4) + (x+4)(x-5)$ przyjmuje pewną wartość dla danego dodatniego argumentu, to istnieje ujemny argument, dla którego ta funkcja przyjmuje tę samą wartość.

Zadanie 5

Sporządź wykres funkcji:

a) $f(x) = \sqrt{x-4} - \sqrt{4-x}$

b) $g(x) = \sqrt{(3-2x)(3x-2)} + \sqrt{(2x-3)(3x-2)}$

Zadanie 6

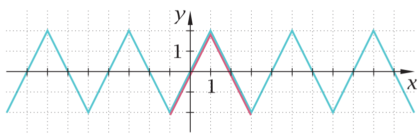
Dana jest funkcja $f(x) = \frac{|7-x|}{7-|x|}$. Czy więcej jest takich liczb pierwszych, dla których funkcja f przyjmuje wartość 1, czy też takich liczb pierwszych, dla których przyjmuje wartość -1? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 7

Dane są funkcje: $f(x) = x - 6$, $g(x) = -x - 2$ i $h(x) = f(x) + g(x)$. Wykresy tych funkcji sporządzono w jednym układzie współrzędnych. Każdy z nich przechodzi przez dwa wybrane wierzchołki pewnego trójkąta. Oblicz pole tego trójkąta.

Zadanie 8

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji g, który składa się z takich samych fragmentów (jeden z nich zaznaczono na rysunku na czerwono). Dziedziną funkcji g jest zbiór liczb rzeczywistych. Ile punktów wspólnych ma wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{20}x$ z wykresem funkcji g?



Zadanie 9

Dana jest funkcja $f(n) = \sqrt{2^{2n} + 2^{2n+3}}$, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych. Uzasadnij, że obie współrzędne wszystkich punktów należących do wykresu funkcji f są liczbami naturalnymi.

Zadanie 10

Dana jest funkcja $f(x) = 2^x$, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych. Na wykresie funkcji f obrano trzy punkty o odciętych x_1, x_2, x_3, takich że $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = 1$. Pole trójkąta o wierzchołkach w tych punktach wynosi 4. Podaj współrzędne tych punktów.

Zadania dla zdolnych gimnazjalistów, cz. 2 – odpowiedzi i szkice rozwiązań

Klasa 1. Procenty

1. Najmniejsza trzycyfrowa wielokrotność liczby 5 to 100, a największa – 995. Mamy więc 180 trzycyfrowych wielokrotności liczby 5. Najmniejszą trzycyfrową wielokrotnością liczby 25 jest 100, a największą 975. Mamy zatem 36 trzycyfrowych wielokrotności liczby 25. Stanowią one 20% trzycyfrowych wielokrotności liczby 5.

2. Krawędź sześcianu ma długość 12 cm. Prostopadłościan miał wymiary: $15\,\text{cm} \times 16\,\text{cm} \times 24\,\text{cm}$, a jego pole powierzchni było równe 1968 cm^2.

3. Krawędź sześcianu zmniejszono o 20%. Objętość otrzymanego sześcianu jest mniejsza o 48,8%.

4. Oznaczmy: m – początkowa masa roztworu, x – masa dolanej wody. Wtedy:

$\frac{0{,}6m}{m+x} = 0{,}4$

$x = 0{,}5m$

Masa roztworu wzrosła o 50%.

5. Liczba n musi być podzielna przez 2^{10}. Najmniejszą dodatnią wielokrotnością liczby 1024 jest 1024. Liczba n jest więc większa od 1000.

6. Oznaczmy: v – średnia prędkość pana Jerzego, s – droga. Średnia prędkość pana Wojciecha wynosi $1{,}1v$.

$$\frac{\frac{s}{v} - \frac{s}{1{,}1v}}{\frac{s}{v}} \cdot 100\% = 9\frac{1}{11}\%$$

Czas przejazdu pana Wojciecha był o $9\frac{1}{11}\%$ krótszy niż czas przejazdu pana Jerzego.

7. Oznaczmy: x – początkowa masa roztworu. Wtedy masa soli w początkowym roztworze jest równa $\frac{px}{100}$. Stężenie roztworu po dolaniu wody jest równe: $\frac{\frac{px}{100}}{x+\frac{qx}{100}} \cdot 100\% = \frac{100p}{100+q}\%$.

8. Suma cyfr liczby podzielnej przez 9 jest dodatnią liczbą podzielną przez 9, czyli jest równa co najmniej 9. Największą liczbą trzycyfrową jest 999. Mamy: $\frac{9}{999} = 0{,}(009) = 9{,}(009)\text{‰} > 9\text{‰}$.

9. Niech a, b, c, d, e będą takimi liczbami, że $0 < a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$. Zachodzi nierówność:
$\frac{a+b+c+d+e}{5} > \frac{e}{5}$. Zauważmy, że 20% liczby e to $\frac{e}{5}$.

Klasa 2. Wyrażenia algebraiczne i układy równań

1. Po przekształceniu równania otrzymamy: $q(r+1) = \frac{15}{p} - 1$. Liczba p może być równa: 1, 3 lub 5. Szukane trójki liczb to: (1, 1, 13), (1, 2, 6), (1, 7, 1), (3, 1, 3), (3, 2, 1), (5, 1, 1).

2. W pierwszym pojemniku jest 60 białych kul, a w drugim – 90. Oznaczmy: x – liczba przełożonych kul. Wtedy: $\frac{90-x}{300-x} = \frac{60+x}{300+x}$. Stąd $x = 20$.

3. Po odjęciu stronami drugiego równania od pierwszego, trzeciego – od drugiego, czwartego – od trzeciego, otrzymamy:

$$\begin{cases} x_5 + x_4 + x_3 + x_2 + x_1 = 0 \\ x_5 + x_4 + x_3 + x_2 = 0 \\ x_5 + x_4 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Po odjęciu stronami drugiego równania od pierwszego i trzeciego – od drugiego, otrzymamy: $x_1 = 0$ i $x_2 = 0$.

4. a) $\frac{1}{a+b} < \frac{1}{a}$, ponieważ $a < a+b$.

b) Zauważmy, że:

$$\frac{1}{a+b+c} < \frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{a+b+c} < \frac{1}{b}$$

$$\frac{1}{a+b+c} < \frac{1}{c}$$

Po dodaniu stronami tych trzech nierówności otrzymujemy nierówność z zadania.

5. Z pierwszego równania wynika, że: $x \leqslant 0$ i $y \leqslant 0$, natomiast z drugiego równania mamy: $x \geqslant 0$ i $y \geqslant 0$. Tylko para $x = 0$ i $y = 0$ spełnia te założenia. Wystarczy sprawdzić, czy jest to rozwiązanie danego układu.

6. Przyjmijmy przeciwnie, że istnieje para liczb całkowitych spełniająca dany układ równań. Wówczas z drugiego równania wynika, że jedna z liczb jest parzysta, a druga – nieparzysta. Suma ich wartości bezwzględnych jest nieparzysta, co przeczy pierwszemu równaniu.

7. $[(a+b)+(c+d)]^2 = (a+b+c+d)^2$

8. Dany układ jest równoważny następującemu: $\begin{cases} 2x - xy = 1 \\ 2y - xy = 1 \end{cases}$. Po odjęciu równań stronami otrzymamy: $2x - 2y = 0$, czyli $x = y$. Po podstawieniu do pierwszego równania i odpowiednich przekształceniach otrzymamy: $x = 1$ oraz $y = 1$.

9. Oznaczmy: m – początkowa masa roztworu, s – początkowa masa substancji rozpuszczonej, w – masa wody w początkowym roztworze, M – końcowa masa roztworu. Mamy:

$m = s + w$ i $M = s + \frac{p}{100}s + w - \frac{p}{100}w = m + \frac{p}{100}(s - w)$.

Wtedy:

$$\frac{s + \frac{p}{100}s}{M} = 2 \cdot \frac{s}{m}$$

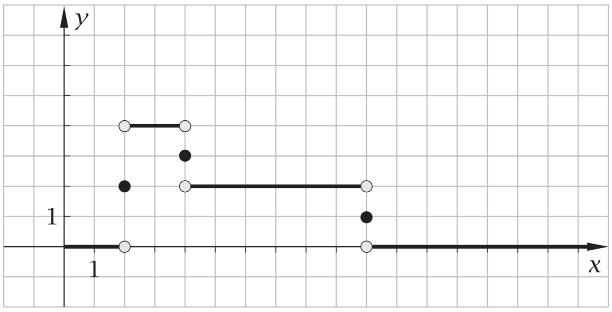
$$\frac{s(100+p)}{100M} = \frac{2s}{m}$$

$$\frac{s(100+p)}{100m \cdot \frac{100-p}{100}} = \frac{2s}{m}$$

$$p = 33\frac{1}{3}$$

Klasa 3. Funkcje

1.



2. $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(2,3)$, $(3,2)$.

3. Należy narysować wykres funkcji $f(x) = |x|$.

4. Po przekształceniach otrzymamy: $f(x) = 4x^2 - 40$. Funkcja f przyjmuje tę samą wartość dla argumentów będących liczbami przeciwnymi różnymi od zera.

5. a) Wykresem funkcji f jest punkt $(4,0)$.
b) Zauważmy, że $(3-2x)(3x-2) = -(2x-3)(3x-2)$. Suma pierwiastków jest określona, gdy wyrażenia pod pierwiastkami jednocześnie przyjmują wartość 0. Zatem $(3-2x)(3x-2) = 0$. Stąd $x = 1\frac{1}{2}$ lub $x = \frac{2}{3}$. Wykresem funkcji g są punkty $(1\frac{1}{2},0)$ i $(\frac{2}{3},0)$.

6. Funkcja f jest określona dla $x \neq -7$ i $x \neq 7$. Licznik wyrażenia $\frac{|7-x|}{7-|x|}$ jest dodatni, więc równość $f(x) = 1$ zajść może jedynie wówczas, gdy $7 - |x| > 0$, czyli $|x| < 7$. Jedynymi liczbami pierwszymi spełniającymi ten warunek są: 2, 3 i 5. Zatem co najwyżej dla trzech liczb pierwszych funkcja f przyjmuje wartość 1. Łatwo sprawdzić, że $f(11) = f(13) = f(17) = f(19) = -1$, czyli więcej jest liczb pierwszych, dla których $f(x) = -1$.

7. Wierzchołkami trójkąta są: $(-2,-8)$, $(2,-4)$ i $(6,8)$. Pole trójkąta jest równe 16.

8. Zauważmy, że $f(x) = 2$ dla $x = 40$, zaś $f(x) = -2$ dla $x = -40$. Rozpatrzmy sytuację dla argumentów nieujemnych. Odcinek łączący punkt $(0,0)$ z punktem $(40,2)$ ma 20 punktów wspólnych z wykresem funkcji g. Dla $x > 40$ nie otrzymamy nowych punktów wspólnych.
Dla argumentów niedodatnich sytuacja jest analogiczna. Wykres funkcji f ma więc $20 + 20 - 1 = 39$ punktów wspólnych z wykresem funkcji g.

9. $\sqrt{2^{2n} + 2^{2n+3}} = \sqrt{2^n(1+2^3)} = \sqrt{(2^n)^2 \cdot 3^2} = 3 \cdot 2^n$.
Jeśli n jest liczbą naturalną, to $3 \cdot 2^n$ też jest liczbą naturalną.

10. Zauważmy, że: $P_{PQR} = P_{ACRP} - P_{ABQP} - P_{BCRQ}$.
Oznaczmy: $x_1 = t$. Wtedy: $x_2 = t+1$, $x_3 = t+2$.

$P_{PQR} = \frac{2^t+2^{t+2}}{2} \cdot 2 - \frac{2^t+2^{t+1}}{2} \cdot 1 - \frac{2^{t+1}+2^{t+2}}{2} \cdot 1 = 2^{t-1}$

$2^{t-1} = 4$

$t = 3$

Szukane punkty to: $P = (3,8)$, $Q = (4,16)$, $R = (5,32)$.