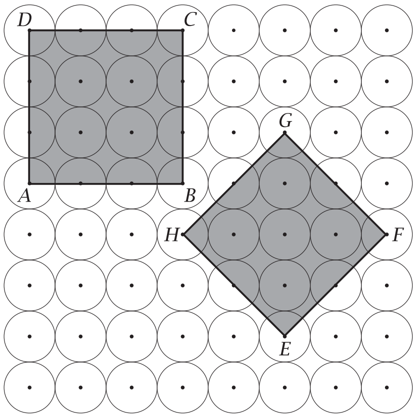
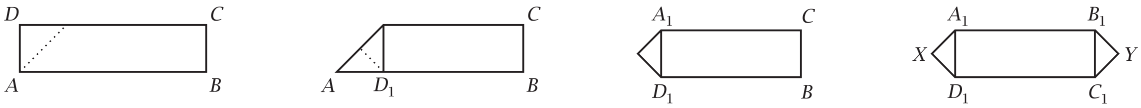
Zadanie 1

Który z czworokątów przedstawionych na rysunku ma większe pole? Odpowiedź uzasadnij.



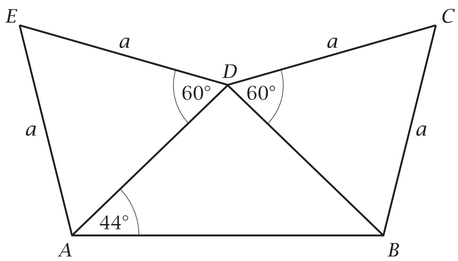
Zadanie 2

Kartkę w kształcie prostokąta o wymiarach 20 cm × 5 cm pozaginano przy krótszych bokach w sposób pokazany na rysunku. Jaka jest odległość między punktami X i Y?



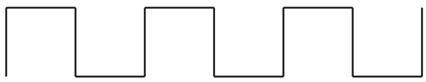
Zadanie 3

Uzasadnij, że trójkąt ABD przedstawiony na rysunku jest rozwartokątny.



Zadanie 4

Na rysunku przedstawiono fragment pewnej łamanej o regularnej budowie. Cała łamana ma 333 boki.



Wszystkie boki tej łamanej mają taką samą długość, a kolejne są do siebie prostopadłe.

a) Narysuj cztery następne boki tej łamanej, wiedząc, że są położone według reguły przedstawionej na rysunku.

b) Przez końce całej łamanej poprowadzono prostą. Ile punktów wspólnych ma ta prosta z łamaną?

Zadanie 5

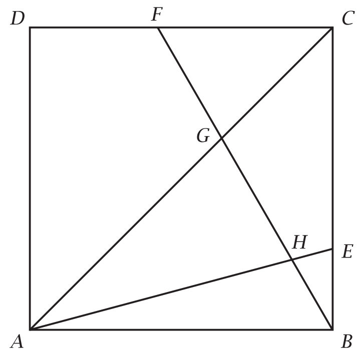
Pewien prostokąt ma wymiary 12 cm × 7 cm. Przez punkt przecięcia się jego przekątnych poprowadzono prostą, która podzieliła ten prostokąt na dwie figury. Z powstałych figur można ułożyć romb. Jaki jest obwód tego rombu?

Zadanie 6

Pewien kwadrat podzielono na trzy prostokąty za pomocą dwóch równoległych odcinków. Obwody tych prostokątów są równe 34 cm, 36 cm i 38 cm. Ile wynosi obwód kwadratu?

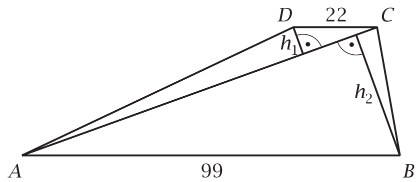
Zadanie 7

W kwadracie $ABCD$ zaznaczono na boku BC taki punkt E, że $|\sphericalangle BAE| = 15°$, a na boku CD – taki punkt F, że $|\sphericalangle FBC| = 30°$ (zob. rysunek obok). Prosta BF przecina prostą AC w punkcie G, a prostą AE w punkcie H. Uzasadnij, że trójkąty AHG i HBE są równoramienne.



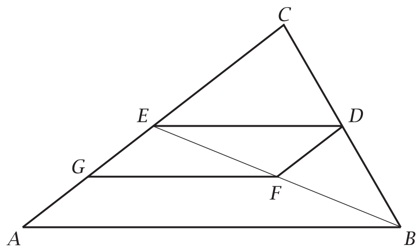
Zadanie 8

Długości podstaw trapezu $ABCD$ wynoszą: $|AB| = 99$, $|CD| = 22$. Przekątna AC podzieliła ten trapez na dwa trójkąty. Z wierzchołków D i B poprowadzono wysokości tych trójkątów. Ile jest równe $h_1 : h_2$?



Zadanie 9

W trójkącie ABC punkty D i E są środkami odpowiednio boków BC i AC, punkt F jest środkiem odcinka BE, a punkt G – odcinka AE. Jaką częścią trójkąta ABC jest czworokąt $GFDE$?



Zadanie 10

Przekątna pewnego czworokąta wypukłego dzieli go na dwa trójkąty o jednakowych polach. Uzasadnij, że przechodzi ona przez środek drugiej przekątnej.

Klasa 2. Trójkąty prostokątne, wielokąty i okręgi

Zadanie 1

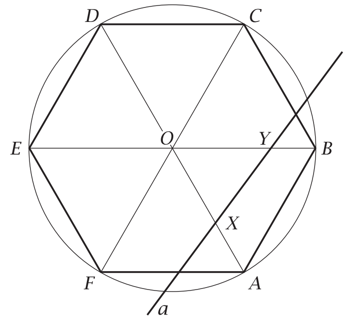
Na okręgu opisano trapez równoramienny, którego obwód wynosi 20 cm. Wysokości poprowadzone z dwóch wierzchołków trapezu dzielą go na dwa trójkąty i prostokąt. Obwód każdej z powstałych figur wynosi 12 cm. Oblicz pole tego trapezu.

Zadanie 2

Podziel trapez równoramienny niebędący prostokątem na cztery trapezy równoramienne.

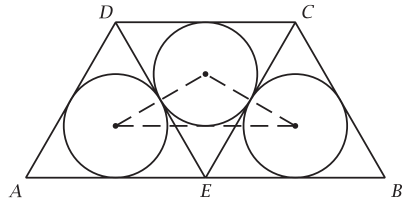
Zadanie 3

Punkt O jest punktem przecięcia przekątnych sześciokąta foremnego $ABCDEF$. Prosta a przecina odcinek OA w punkcie X, zaś odcinek OB – w punkcie Y. Uzasadnij, że jeśli trójkąt OXY jest równoramienny, to prosta a jest równoległa do przekątnej CF.



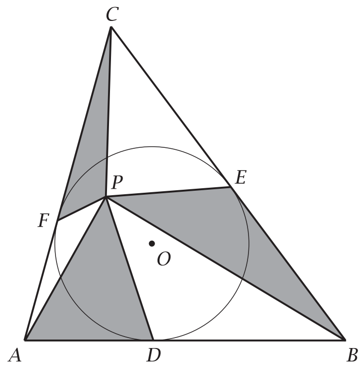
Zadanie 4

Trapez $ABCD$ podzielono na trzy trójkąty równoboczne (zob. rysunek obok). W każdy z tych trójkątów wpisano okrąg. Pole trapezu wynosi 9. Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach w środkach tych okręgów.



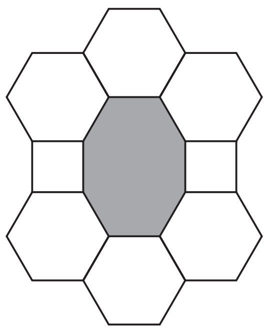
Zadanie 5

W trójkąt ABC wpisano okrąg. Wewnątrz trójkąta obrano punkt P, który połączono za pomocą odcinków z wierzchołkami tego trójkąta oraz z punktami styczności. Trzy z powstałych w ten sposób trójkątów zacieniowano (zob. rysunek). Uzasadnij, że iloczyn pól zacieniowanych trójkątów jest równy iloczynowi pól białych trójkątów.



Zadanie 6

Na rysunku przedstawiono ośmiokąt, którego wszystkie boki są równej długości, oraz sześciokąty foremne i kwadraty. Pole każdego z sześciokątów jest równe $\sqrt{3}$. Ile wynosi pole zacieniowanego ośmiokąta?



Zadanie 7

W pewnym czworokącie wypukłym sumy długości przeciwległych boków są jednakowe. Przekątne tego czworokąta są prostopadłe. Uzasadnij, że iloczyny długości przeciwległych boków są sobie równe.

Zadanie 8

Trójkąt podzielono za pomocą symetralnej jednego z boków na trójkąt i czworokąt. Na czworokącie opisano okrąg o promieniu r. Uzasadnij, że prawdziwa jest nierówność:

$$0{,}5R < r,$$

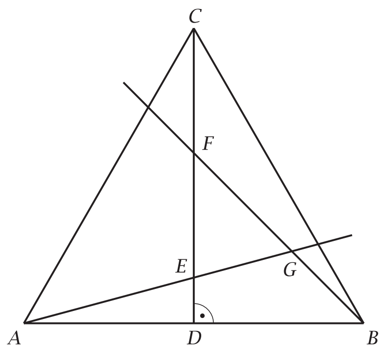
gdzie R – promień okręgu opisanego na początkowym trójkącie.

Zadanie 9

W trójkącie równobocznym ABC poprowadzono wysokość CD, a na niej obrano takie punkty E i F, że:

$$0° < |\sphericalangle EAD| = |\sphericalangle FBC| < 30°$$

Punkt przecięcia prostych BF i AE oznaczono literą G. Uzasadnij, że trójkąt EFG jest różnoboczny.



Zadanie 10

Na bokach AB, BC, CA trójkąta ABC zaznaczono odpowiednio takie punkty X, Y, Z, że:

$|AX| + |BC| = |CA| + |BX|$

$|BY| + |AC| = |AB| + |CY|$

$|CZ| + |AB| = |BC| + |AZ|$

Uzasadnij, że środek okręgu opisanego na trójkącie XYZ pokrywa się ze środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

Klasa 3. Figury na płaszczyźnie i figury podobne

Zadanie 1

Wewnątrz trójkąta wybrano punkt X. Obwód trójkąta wynosi L, a suma odległości punktu X od trzech jego wierzchołków jest równa S. Uzasadnij, że: a) $S > \frac{1}{2}L$, b) $S < L$.

Zadanie 2

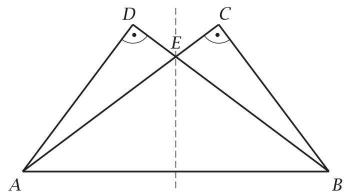
Jeden z wierzchołków trójkąta o kątach 50°, 60° i 70° połączono odcinkami z dwoma punktami leżącymi na przeciwległym boku, dzieląc trójkąt na trzy trójkąty. Trójkąt, którego dwoma bokami są te odcinki, jest podobny do trójkąta początkowego. Podaj miary kątów trójkątów, na które podzielono trójkąt początkowy.

Zadanie 3

Na kartce w kratkę linie biegnące w jednym kierunku zaznaczono na niebiesko, a linie do nich prostopadłe – na czerwono. Na tej kartce narysowano okrąg, który ma 18 punktów wspólnych z liniami niebieskimi i 19 – z czerwonymi. Czy pole koła ograniczonego tym okręgiem jest większe od pola powierzchni 100 kratek? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4

Trójkąt ABD jest symetryczny do trójkąta prostokątnego ABC względem symetralnej boku AB (zob. rysunek). Wiadomo, że: $|AC| = 8$ cm i $|BC| = 6$ cm. Oblicz pola trójkątów AED i ABE.



Zadanie 5

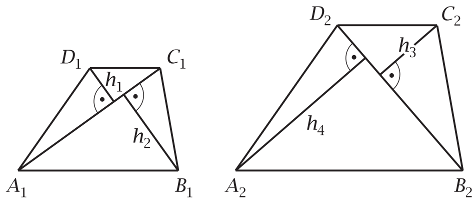
Dany jest sześciokąt foremny $ABCDEF$ o boku długości 1. Punkt G jest środkiem boku BC, a prosta EG przecina prostą AB w punkcie H. Oblicz długość odcinka AH.

Zadanie 6

Jedna z przekątnych pewnego czworokąta wypukłego dzieli go na dwa trójkąty, których stosunek pól jest równy k. W jakim stosunku punkt przecięcia się przekątnych dzieli drugą przekątną?

Zadanie 7

Przedstawione na rysunku trapezy $A_1B_1C_1D_1$ i $A_2B_2C_2D_2$ są podobne. Która liczba jest większa: $\frac{h_1}{h_2}$ czy $\frac{h_3}{h_4}$?



Zadanie 8

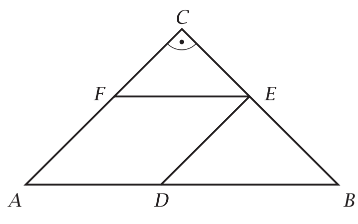
Na osi liczbowej zaznaczono punkty o współrzędnych: 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, …, 2^{100}. Przez każdy z tych punktów poprowadzono prostą prostopadłą do osi. Okrąg o promieniu 4080 ma środek na jednej z tych prostych i jest styczny do jednej z pozostałych. Ile narysowanych prostych nie ma żadnego punktu wspólnego z tym okręgiem?

Zadanie 9

Kolejne boki czworokąta wypukłego mają długość: 48 cm, 72 cm, 162 cm, 243 cm. Jedna z przekątnych dzieli ten czworokąt na dwa trójkąty podobne. Jaką długość ma ta przekątna?

Zadanie 10

Na rysunku przedstawiono trójkąt prostokątny równoramienny ABC o przyprostokątnych długości 1 oraz romb $ADEF$. Oblicz długość boku tego rombu.



Zadania dla zdolnych gimnazjalistów, cz. 3 – odpowiedzi i szkice rozwiązań

Klasa 1. Figury geometryczne

Zadanie 1
Aby porównać pola czworokątów, trzeba policzyć, ile kwadratów o boku równym średnicy jednego okręgu mieści się w każdym z nich. Czworokąt *ABCD* składa się z dziewięciu kwadratów „jednostkowych”, a czworokąt *EFGH* – z ośmiu kwadratów „jednostkowych”. Zatem czworokąt *ABCD* ma większe pole niż czworokąt *EFGH*.

Zadanie 2
Odległość między punktami X i Y wynosi 15 cm.

Zadanie 3
Trójkąty *ADE* i *BCD* są równoboczne, więc $|AD| = |BD| = a$. Zatem trójkąt *ABD* jest równoramienny i $|\sphericalangle ABD| = 44°$. Stąd $|\sphericalangle ADB| = 92°$, czyli trójkąt *ABD* jest rozwartokątny.

Zadanie 4
Po podzieleniu całej łamanej na 83 segmenty składające się z czterech kolejnych odcinków pozostanie nam jeden odcinek. Prosta ma po 2 punkty wspólne z każdym takim segmentem i jeden punkt wspólny z ostatnim odcinkiem, czyli wszystkich punktów wspólnych jest: $83 \cdot 2 + 1 = 167$

Zadanie 5
Obwód rombu jest równy: $4 \cdot 12 = 48$ cm.

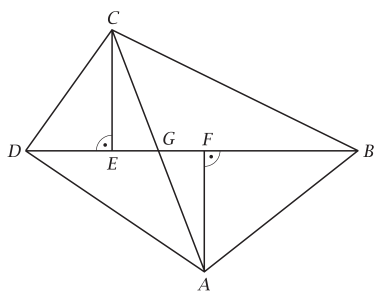
Zadanie 6
Oznaczmy: a – bok kwadratu. Wtedy:
$34 + 36 + 38 = 8a$
$4a = 54$ [cm]

Zadanie 7
$|\sphericalangle GAH| = |\sphericalangle CAE| = 45° - 15° = 30°$
$|\sphericalangle AGH| = |\sphericalangle FGC| = 180° - (|\sphericalangle BFC| + |\sphericalangle ACD|) = 180° - (60° + 45°) = 75°$
$|\sphericalangle AHG| = 180° - (30° + 75°) = 75°$
Stąd trójkąt *AHG* jest równoramienny.
$|\sphericalangle HBE| = |\sphericalangle FBC| = 30°$
$|\sphericalangle BHE| = |\sphericalangle AHG| = 75°$
$|\sphericalangle BEH| = 180° - (30° + 75°) = 75°$
Zatem trójkąt *HBE* jest równoramienny.

Zadanie 8
Oznaczmy: H – wysokość trapezu. Wtedy:
$\frac{P_{ACD}}{P_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot h_1}{\frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot h_2} = \frac{h_1}{h_2}$ oraz $\frac{P_{ACD}}{P_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 22 \cdot H}{\frac{1}{2} \cdot 99 \cdot H} = \frac{2}{9}$, więc $\frac{h_1}{h_2} = \frac{2}{9}$.

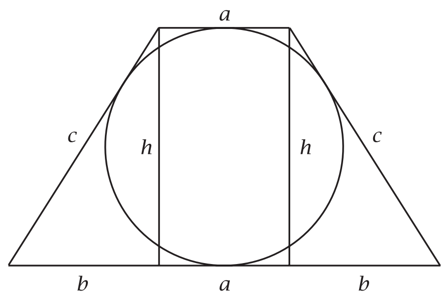
Zadanie 9
$\frac{1}{4}$

Zadanie 10
Niech pola trójkątów *ABD* i *BCD* będą jednakowe. Wysokości *AF* i *CE* są wtedy równe, bo trójkąty te mają wspólny bok. Ponadto odcinki *AF* i *CE* są równoległe. Czworokąt *AFCE* jest więc równoległobokiem, a punkt G – środkiem przekątnej *AC* tego równoległoboku, czyli środkiem przekątnej czworokąta *ABCD*.



Klasa 2. Trójkąty prostokątne, wielokąty i okręgi

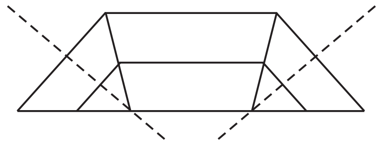
Zadanie 1



Oznaczmy: L – obwód trapezu, P – pole trapezu.
Mamy:
$P = 0{,}5L \cdot 0{,}5h = 0{,}25 \cdot 20 \cdot h = 5h$
$L = 2a + 2b + 2c = 20$, czyli $a + b + c = 10$
Wiadomo, że: $2a + 2h = 12$, więc $a = 6 - h$.
Ponadto:
$b + c + h = 12$, czyli $b + c = 12 - h$
Z równości $a + b + c = 10$ mamy: $6 - h + 12 - h = 10$,
a stąd $h = 4$.
Pole trapezu jest więc równe:
$P = 5 \cdot 4 = 20$ [cm^2]

Zadanie 2

Ideę podziału przedstawia rysunek obok. Linią przerywaną oznaczono symetralne ramion trapezu.



Zadanie 3

Przyjmijmy, że trójkąt OXY jest równoramienny. Zajść mogą dwa przypadki:
I. $|OX| = |OY|$. Ponieważ $|\sphericalangle XOY| = 60°$, więc $|\sphericalangle OXY| = |\sphericalangle OYX| = 60°$, czyli trójkąt OXY jest równoboczny. Zatem $|\sphericalangle OXY| = 60° = |\sphericalangle COY|$, czyli proste XY i CF są równoległe.
II. $|OX| = |XY|$ (albo $|OY| = |XY|$)
Mamy: $|\sphericalangle XYO| = |\sphericalangle XOY| = 60°$, więc $|\sphericalangle OXY| = 60°$. Dalej uzasadniamy analogicznie jak w I przypadku.

Zadanie 4

Oznaczmy:
a – bok trójkąta równobocznego
r – promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny
O_1, O_2, O_3 – środki okręgów wpisanych w trójkąty ADE, CDE, BCE
Trójkąty $O_1O_2O_3$ i AEO_1 są przystające, bo każdy z nich ma boki długości: a, $2r$, $2r$.
Pole trójkąta $O_1O_2O_3$ jest równe polu trójkąta AEO_1, czyli $\left(\frac{1}{3} \cdot 9\right) \cdot \frac{1}{3} = 1$.

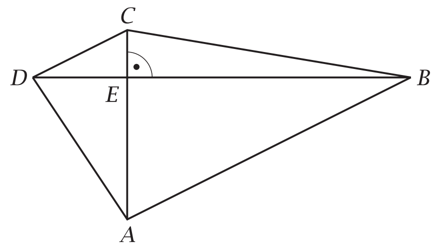
Zadanie 5

Oznaczmy: h_C, h_B, h_A – odległości punktu P odpowiednio od prostych AB, CA, BC.
Mamy:
$P_{ADP} \cdot P_{BEP} \cdot P_{CFP} = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot h_C \cdot \frac{1}{2} \cdot |BE| \cdot h_A \cdot \frac{1}{2} \cdot |CF| \cdot h_B = \frac{h_A \cdot h_B \cdot h_C}{8} \cdot |AD| \cdot |BE| \cdot CF$
Analogicznie otrzymujemy:
$P_{BDP} \cdot P_{CEP} \cdot P_{AFP} = \frac{1}{2} \cdot |BD| \cdot h_C \cdot \frac{1}{2} \cdot |CE| \cdot h_A \cdot \frac{1}{2} \cdot |AF| \cdot h_B = \frac{h_A \cdot h_B \cdot h_C}{8} \cdot |AF| \cdot |BD| \cdot |CE|$
Wykorzystując równości: $|AD| = |AF|$, $|BD| = |BE|$, $|CE| = |CF|$, otrzymujemy równość, którą należało wykazać.

Zadanie 6

Ośmiokąt można podzielić na dwa trapezy i dwa kwadraty. Suma pól tych trapezów jest równa $\sqrt{3}$. Oznaczmy bok ośmiokąta literą a. Pole jednego kwadratu jest równe a^2. Ze wzoru na pole sześciokąta otrzymamy: $a^2 = \frac{2}{3}$. Pole ośmiokąta jest więc równe:
$\sqrt{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} = \left(\sqrt{3} + 1\frac{1}{3}\right)$

Zadanie 7



Zauważmy, że:

$$\begin{cases} |AB|^2 = |AE|^2 + |EB|^2 \\ |CD|^2 = |DE|^2 + |EC|^2 \end{cases}$$

Stąd:

$|AB|^2 + |CD|^2 = |AE|^2 + |BE|^2 + |CE|^2 + |DE|^2$

Analogicznie otrzymujemy:

$|AD|^2 + |BC|^2 = |AE|^2 + |BE|^2 + |CE|^2 + |DE|^2$

Mamy więc:

$|AB|^2 + |CD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2 \quad (*)$

Wiemy, że: $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$, czyli

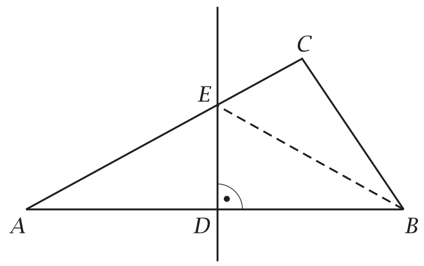
$(|AB| + |CD|)^2 = (|AD| + |BC|)^2$

$|AB|^2 + 2 \cdot |AB| \cdot |CD| + |CD|^2 = |AD|^2 + 2 \cdot |AD| \cdot |BC| + |BC|^2$

Wykorzystując równość (*), otrzymujemy:

$|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$

Zadanie 8



Trójkąt DBE jest prostokątny, więc $|BE| = 2r$. Ponadto $|AB| \leqslant 2R$. Z własności trójkąta prostokątnego mamy: $|BE| > |BD|$, czyli $2r > |BD|$. Zauważmy, że trójkąt ABC jest prostokątny, więc $|BD| = R$. Stąd $r > 0{,}5R$.

Zadanie 9

Oznaczmy: $|\sphericalangle EAD| = \alpha$. Wtedy:

$|\sphericalangle FEG| = |\sphericalangle AED| = 90° - \alpha$

$|\sphericalangle EFG| = |\sphericalangle DFB| = 90° - (60° - \alpha) = 30° + \alpha$

$|\sphericalangle EGF| = 180° - (90° - \alpha + 30° + \alpha) = 60°$

Jeśli $\alpha < 30°$, to:

$|\sphericalangle FEG| > 90° - 30° = 60°$

$|\sphericalangle EFG| < 30° + 30° = 60°$

Każdy kąt w trójkącie EFG ma inną miarę, więc trójkąt EFG jest różnoboczny.

Zadanie 10

Dodając stronami pierwsze dwie równości, otrzymamy:

$|AX| + |BC| + |BY| + |AC| = |CA| + |BX| + |AB| + |CY|$

$|AX| + |BC| + |BY| = |BX| + |AB| + |CY|$

$|AX| + |CY| + |BY| + |BY| = |BX| + |AX| + |BX| + |CY|$

$2 \cdot |BY| = 2 \cdot |BX|$

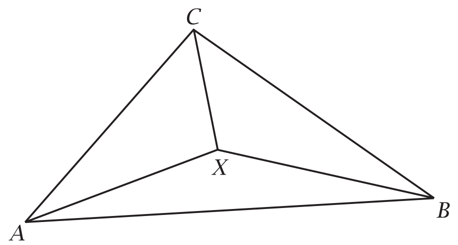
$|BX| = |BY|$

Analogicznie otrzymamy: $|AX| = |AZ|$ i $|CY| = |CZ|$.

Symetralna odcinka XY jest dwusieczną kąta XBY, bo trójkąt XBY jest równoramienny. Zatem punkt przecięcia się symetralnych odcinków XY, YZ, ZX jest jednocześnie punktem przecięcia się dwusiecznych kątów ABC, BCA, CAB, czyli środki, o których mowa w zadaniu, pokrywają się.

Klasa 3. Figury na płaszczyźnie i figury podobne

Zadanie 1



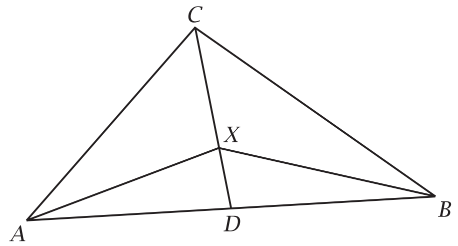
a) Z nierówności trójkąta mamy:

$$\begin{cases} |XA| + |XB| > |AB| \\ |XA| + |XC| > |AC| \\ |XB| + |XC| > |BC| \end{cases}$$

Stąd:

$2(|XA| + |XB| + |XC|) > |AB| + |BC| + |AC|$

Czyli $2S > L$, więc $S > \frac{1}{2}L$.



b) Z nierówności trójkąta mamy:

$|CD| < |CA| + |AD|$

$|CD| + |DB| < |CA| + |AD| + |DB|$

$|CD| + |DB| < |CA| + |AB|$

W ten sam sposób otrzymujemy nierówność:

$|CX| + |XB| < |CD| + |DB|$

Z tej i z poprzedniej nierówności mamy:

$|CX| + |XB| < |CA| + |AB|$

Analogicznie otrzymujemy:

$|AX| + |XB| < |AC| + |CB|$ i $|AX| + |XC| < |BA| + |BC|$

Po dodaniu tych nierówności stronami mamy:

$2(|XA| + |XB| + |XC|) < 2(|AB| + |BC| + |CA|)$

$S < L$

Zadanie 2

10°, 50°, 120°

10°, 60°, 110°

50°, 60°, 70°

Zadanie 3

Pole tego koła jest mniejsze od pola powierzchni 100 kratek: $\pi \cdot 25 < 4 \cdot 25 = 100$

Zadanie 4

Oznaczmy: x – długość odcinka EB. Wtedy $|DE| = 8 - x$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADE mamy:

$6^2 + (8 - x)^2 = x^2$

$36 + 64 - 16x + x^2 = x^2$

Stąd $x = 6{,}25$.

$|DE| = 8 - 6\frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$

$P_{AED} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1\frac{3}{4} = 5{,}25\,\text{cm}^2$

$P_{ABE} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 - 5{,}25 = 18{,}75\,\text{cm}^2$

Zadanie 5

Proste ED i BC przecinają się w punkcie I. Trójkąt CID jest trójkątem równobocznym o boku 1. Proste AB i ED są równoległe, więc $|\sphericalangle GBH| = |\sphericalangle GIE|$ oraz $|\sphericalangle GHB| = |\sphericalangle GEI|$, czyli trójkąty BHG i EGI są podobne, a skala podobieństwa jest równa:

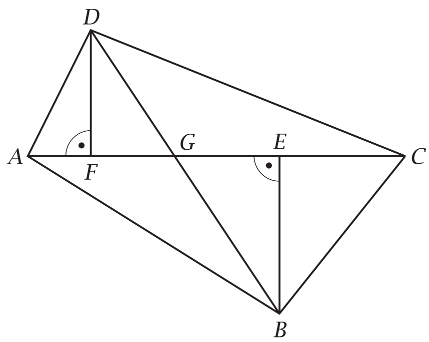
$k = \frac{|GB|}{|GI|} = \frac{\frac{1}{2}}{1\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

Mamy więc:

$|BH| = \frac{1}{3} \cdot |EI| = \frac{2}{3}$,

czyli $|AH| = 1 + \frac{2}{3} = 1\frac{2}{3}$.

Zadanie 6



$\frac{P_{ABC}}{P_{ACD}} = \frac{0{,}5 \cdot |AC| \cdot |EB|}{0{,}5 \cdot |AC| \cdot |FD|} = \frac{|EB|}{|FD|} = k$

Zauważmy, że wysokości BE i DF są równoległe. Kąty GBE i GDF są naprzemianległe, czyli równe, więc trójkąty BEG i DFG są podobne, a skala podobieństwa jest równa $\frac{|EB|}{|FD|} = k$. Zatem: $\frac{|BG|}{|GD|} = k$.

Zadanie 7

Oznaczmy: H – wysokość trapezu $A_1B_1C_1D_1$. Wtedy:

$\frac{P_{A_1C_1D_1}}{P_{A_1C_1B_1}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |A_1C_1| \cdot h_1}{\frac{1}{2} \cdot |A_1C_1| \cdot h_2} = \frac{h_1}{h_2}$

$\frac{P_{A_1C_1D_1}}{P_{A_1C_1B_1}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |C_1D_1| \cdot H}{\frac{1}{2} \cdot |A_1B_1| \cdot H} = \frac{|C_1D_1|}{|A_1B_1|}$

Zatem: $\frac{h_1}{h_2} = \frac{|C_1D_1|}{|A_1B_1|}$.

Analogicznie w drugim trapezie otrzymamy: $\frac{h_3}{h_4} = \frac{|C_2D_2|}{|A_2B_2|}$.

Z podobieństwa trapezów mamy: $\frac{|C_1D_1|}{|A_1B_1|} = \frac{|C_2D_2|}{|A_2B_2|}$, więc $\frac{h_1}{h_2} = \frac{h_3}{h_4}$.

Zadanie 8

Oznaczmy kolejne proste następująco: $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{100}$. Przyjmijmy, że środek okręgu znajduje się na prostej A_k, a styczną niech będzie prosta A_m. Odległość między tymi prostymi jest równa 4080, czyli $|2^k - 2^m| = 4080$.

Przyjmijmy, że $k < m$. Wtedy:

$2^m - 2^k = 4080$

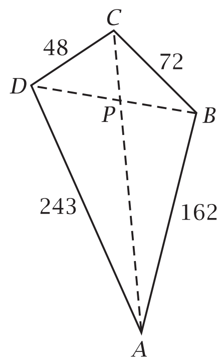
$2^k(2^{m-k} - 1) = 4080$

Ponieważ $4080 = 16 \cdot 255 = 2^4 \cdot (2^8 - 1)$, więc $k = 4$ i $m = 12$. Środek okręgu leży na prostej A_4 i okrąg jest styczny do A_{12} lub odwrotnie (gdyby przyjąć, że $k > m$).

W pierwszym przypadku okrąg jest rozłączny z $101 - 13 = 88$ prostymi, a w drugim – z $4 + (101 - 13) = 92$ prostymi.

Zadanie 9

I przypadek



Przyjmijmy, że przekątna, o której jest mowa w zadaniu, to odcinek AC. Oznaczmy: p – długość przekątnej AC.

Z nierówności trójkąta dla trójkąta ABC mamy: $p < 234$, a dla trójkąta ADC: $p > 243 - 48 = 195$, czyli $195 < p < 234$. W trójkącie ABC odcinek AC jest najdłuższym bokiem, a najkrótszy bok w tym trójkącie ma długość 72 cm. W trójkącie ADC najdłuższy bok ma długość 243 cm, a najkrótszy 48 cm. Jeśli te trójkąty byłyby podobne, zachodziłaby proporcja: $\frac{p}{243} = \frac{72}{48}$. Stąd $p = 364{,}5$. Ta wartość p nie spełnia warunku $195 < p < 234$.

II przypadek

Przyjmijmy, że przekątna, o której jest mowa w zadaniu, to odcinek BD.

Oznaczmy: q – długość przekątnej BD.

Z nierówności trójkąta mamy: $q > 243 - 162 = 81$ i $q < 48 + 72 = 120$, czyli $81 < q < 120$. Zatem q jest najkrótszym bokiem w trójkącie BAD i najdłuższym w trójkącie BCD. Mamy więc: $\frac{q}{243} = \frac{72}{162}$, czyli $q = 108$.

Zatem przekątna ma długość 108 cm.

Zadanie 10

Oznaczmy: a – bok rombu.

Trójkąt FEC jest podobny do trójkąta ABC w skali $\frac{a}{\sqrt{2}}$, czyli $|CE| = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Ponadto $|BE| = a$, więc $\frac{a}{\sqrt{2}} + a = 1$. Stąd $a = 2 - \sqrt{2}$.