Klasa 1. Wyrażenia algebraiczne

Zadanie 1
Znajdź cztery różne liczby naturalne, dla których wartość wyrażenia:

$$\frac{(n-1)(n-23)(n-456)(n-7890)}{1\,234\,567\,890}$$

jest dodatnią liczbą naturalną.

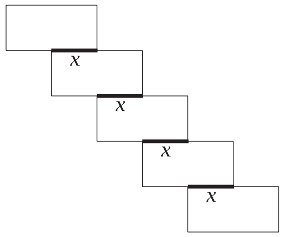
Zadanie 2
Uzasadnij, że dla dowolnych liczb a, b, c oraz d wyrażenie:

$W_1 = (a-b+c-d)(a+b-c-d)(d-c-b-a)(d-c+b-a)$

przyjmuje taką samą wartość jak wyrażenie:

$W_2 = (a+b+c-d)(a-b+c-d)(d-c+b-a)(d+c-b-a)$

Zadanie 3
Przedstawiona na rysunku figura jest zbudowana z pięciu prostokątów o obwodzie d. Każde dwa sąsiednie prostokąty mają wspólny fragment brzegu. Wszystkie te odcinki mają taką samą długość, oznaczmy ją przez x. Jaki obwód będzie miała figura zbudowana w ten sposób z n prostokątów?



Zadanie 4
Wartości wyrażeń $x+1$, $x+3$, $4-x$, gdzie x jest liczbą całkowitą, są długościami boków pewnego trójkąta. Oblicz obwód tego trójkąta.

Zadanie 5
Dane są wyrażenia: $P = 2x+y$ i $Q = x-2y$. Uzasadnij, że dodając lub odejmując odpowiednią liczbę razy te wyrażenia, można otrzymać: a) $55x$, b) $55y$.

Zadanie 6
Sumę liczb naturalnych od 1 do n można obliczyć za pomocą wzoru: $\frac{n(n+1)}{2}$, a sumę kwadratów liczb od 1 do n – ze wzoru: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Wojtek obliczył sumę kwadratów liczb naturalnych od 1 do pewnej liczby n i otrzymał taki sam wynik jak Jurek, który obliczył sumę kolejnych liczb naturalnych od 1 do $2n$. Ile składników miała suma Wojtka?

Zadanie 7
O pewnych liczbach całkowitych a, b, c wiadomo, że: $a(b+c)+b(a+c)+c(a+b)=31$ oraz $abc=10$. Oblicz sumę odwrotności liczb a, b, c.

Zadanie 8
Podaj trzy różne wyrażenia algebraiczne $W(x)$, z których każde dla wymienionych w tabeli wartości x przyjmuje podane wartości $W(x)$.

x	-2	0	2
$W(x)$	-32	0	32

Zadanie 9
Uzasadnij, że jeśli do liczby trzycyfrowej dodamy czterokrotność cyfry dziesiątek, pięciokrotność cyfry setek i sześciokrotność cyfry jedności, to otrzymamy liczbę podzielną przez siedem.

Zadanie 10
Czy istnieje trójkąt o bokach długości a, b, c, w którym:

a) b stanowi 20% długości a, zaś c stanowi 20% obwodu trójkąta,

b) b stanowi 40% długości a, zaś c stanowi 40% obwodu trójkąta?

Klasa 2. Graniastosłupy i ostrosłupy

Zadanie 1
W pewnym graniastosłupie prawidłowym trójkątnym wszystkie krawędzie (boczne i podstawy) mają tę samą długość. Znajdź wszystkie różne siatki tego graniastosłupa.

Uwaga. Siatki uznajemy za różne, gdy nie są figurami przystającymi.

Zadanie 2
Pewna bryła ma 20 ścian, które są trójkątami. Uzasadnij, że ta bryła nie może mieć ani 24 krawędzi, ani 24 wierzchołków.

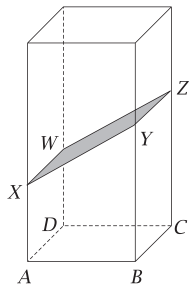
Zadanie 3
Uzasadnij, że wszystkie siatki danego sześcianu mają jednakowe obwody.

Wskazówka. Istnieje 11 różnych (nieprzystających) siatek danego sześcianu.

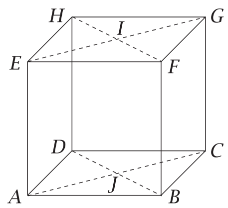
Zadanie 4
Graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy 10 przecięto ukośnie płaszczyzną $WXYZ$, tak że:

$|AX| = |DW| = 7 \qquad |BY| = |CZ| = 13$

Oblicz objętość bryły $ABCDWXYZ$.

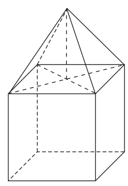


Zadanie 5
Na rysunku przedstawiono sześcian. Uzasadnij, że pole trójkąta IHJ jest mniejsze od pola trójkąta AJH.

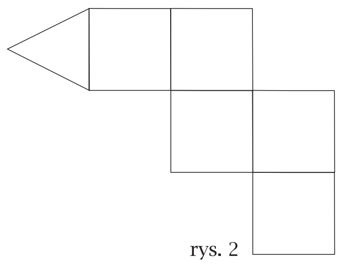


Zadanie 6
Pola trzech ścian prostopadłościanu mają się do siebie jak 1 : 2 : 3. Suma długości krawędzi tego prostopadłościanu wynosi 33 cm. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

Zadanie 7
Wszystkie krawędzie bryły przedstawionej na rys. 1. mają tę samą długość. Uzasadnij, że rys. 2. nie można dokończyć tak, aby otrzymać siatkę tej bryły.



rys. 1



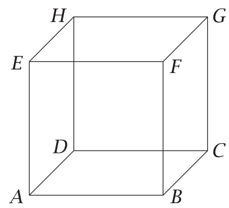
rys. 2

Zadanie 8
Uzasadnij, że z 8 kostek do gry nie można ułożyć sześcianu w taki sposób, by suma oczek na wszystkich widocznych ściankach była równa 46.

Zadanie 9
Do dwóch przeciwległych ścian sześcianu doklejono ostrosłupy prawidłowe czworokątne, tak że podstawa każdego z nich pokryła się ze ścianą sześcianu. Ile przekątnych ma utworzona w ten sposób bryła?

(Przekątna wielościanu to odcinek łączący dwa wierzchołki tego wielościanu, ale niezawarty w żadnej ze ścian tego wielościanu.)

Zadanie 10
Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi 2. Ile jest punktów leżących na krawędziach tego sześcianu, których odległość od wierzchołka A jest równa 3?



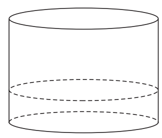
Klasa 3. Bryły

Zadanie 1
Dane są: a, P, V. Uzupełnij tabelę zamieszczoną obok.

	Krawędź	Pole powierzchni	Objętość
Sześcian nr 1	a		
Sześcian nr 2		P	
Sześcian nr 3			V

Zadanie 2
Uzasadnij, że jeśli graniastosłup ma o 18 krawędzi więcej niż ostrosłup i o 18 wierzchołków więcej niż ostrosłup, to obie bryły mają po tyle samo ścian.

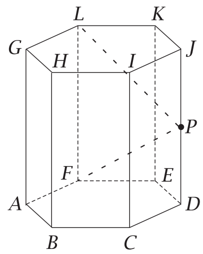
Zadanie 3
Walec, w którym stosunek promienia podstawy do wysokości jest równy 0,6, podzielono płaszczyzną na dwa walce – górny i dolny (zob. rys.). Odległość środka górnej podstawy górnego walca od dowolnego punktu leżącego na okręgu wyznaczonym przez wspólne podstawy obu walców jest równa wysokości walca początkowego. Oblicz stosunek objętości górnego walca do objętości dolnego walca.



Zadanie 4
W sześcianie o krawędzi 1 wybrano przekątną jednej ze ścian oraz taką przekątną sześcianu, która nie ma z nią punktów wspólnych. Wybrane odcinki stanowią dwie krawędzie pewnego czworościanu. Oblicz objętość tego czworościanu.

Zadanie 5
Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny. Wszystkie krawędzie tej bryły mają długość 1. W każdą ścianę tego ostrosłupa wpisano okrąg. Środki tych okręgów są wierzchołkami pewnego ostrosłupa. Oblicz jego objętość.

Zadanie 6
W graniastosłupie prawidłowym przedstawionym na rysunku krawędź boczna jest dwukrotnie dłuższa od krawędzi podstawy. Punkt P jest środkiem krawędzi DJ. Znajdź miary kątów trójkąta FPL.



Zadanie 7
Największą objętością, jaką może osiągnąć graniastosłup prawidłowy czworokątny, mający sumę wszystkich krawędzi równą 120 cm, jest 1000 cm^3. Jaką największą objętość może osiągnąć graniastosłup prawidłowy trójkątny o sumie krawędzi równej 90 cm?

Zadanie 8
Prosta a i trójkąt równoboczny ABC leżą w jednej płaszczyźnie. Prosta a, prostopadła do boku AB, przechodzi przez punkt B. Podczas obrotu tego trójkąta wokół osi a jego boki wyznaczają pewne figury. Oznaczmy przez S_{AB} pole figury wyznaczonej przez bok AB, S_{BC} – przez bok BC i S_{CA} – przez bok CA. Wykaż, że $S_{AB} + S_{BC} = S_{CA}$.

Zadanie 9
Walec umieszczono w kuli tak, że okręgi obu podstaw są zawarte w sferze. Uzasadnij, że pole powierzchni bocznej walca stanowi nie więcej niż połowę pola powierzchni tej kuli.

Zadanie 10
Trójkąt równoboczny obraca się w przestrzeni wokół prostej zawierającej jeden z jego boków, wyznaczając pewną bryłę obrotową. Uzasadnij, że jej objętość jest równa iloczynowi pola tego trójkąta i długości okręgu wyznaczonego przez tor, po którym porusza się punkt przecięcia się środkowych tego trójkąta.

Zadania dla zdolnych gimnazjalistów, cz. 4 – odpowiedzi i szkice rozwiązań

Klasa 1. Wyrażenia algebraiczne

Zadanie 1

$1234567890+1$, $1234567890+23$, $1234567890+456$, $1234567890+7890$

Zadanie 2

Wynika to z równości:

$a-b+c-d=-(d-c+b-a)$

$a+b-c-d=-(d+c-b-a)$

$d-c-b-a=-(a+b+c-d)$

$d-c+b-a=-(a-b+c-d)$

Zadanie 3

$nd-2(n-1)x$

Zadanie 4

$x+1>0$, więc $x>-1$

$x+3>0$, więc $x>-3$

$4-x>0$, więc $x<4$

Dla x równego kolejno 0, 1, 2, 3 otrzymujemy odpowiednio trójki liczb:

1, 3, 4; 2, 4, 3; 3, 5, 2; 4, 5, 1.

Nierówność trójkąta jest spełniona jedynie dla liczb 2, 4 i 3. Obwód tego trójkąta jest równy 9.

Zadanie 5

a) $Q+2P=5x$, więc $11Q+22P=55x$

b) $P-2Q=5y$, więc $11P-22Q=55y$

Zadanie 6

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2n(2n+1)}{2} \qquad n=5$$

Zadanie 7

$a(b+c)+b(a+c)+c(a+b)=2(ab+ac+bc)$, więc $ab+ac+bc=15{,}5$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ac+ab}{abc}=\frac{15{,}5}{10}=1{,}55$$

Zadanie 8

$W_1(x)=x^5$, $W_2(x)=4x^3$, $W_3(x)=16x$

Zadanie 9

$100x+10y+z$ – liczba trzycyfrowa

$100x+10y+z+4y+5x+6z=105x+14y+7z=7(15x+2y+z)$

Zadanie 10

a) $b=0{,}2a$

$c=0{,}2(a+b+c)$

$c=0{,}2(1{,}2a+c)$

$c=0{,}3a$

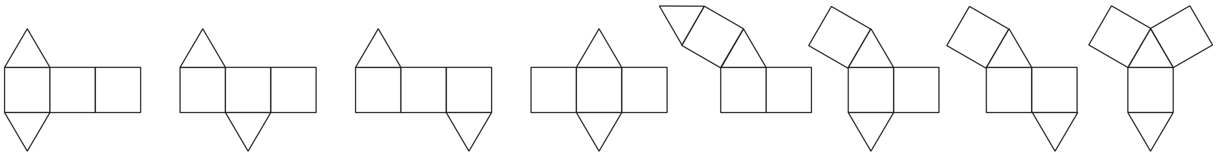
Nie istnieje trójkąt o bokach długości a, $0{,}2a$, $0{,}3a$, bo $0{,}2a+0{,}3a<a$.

b) Analogicznie otrzymujemy $c=\frac{14}{15}a$.

Ponieważ $0{,}4a<\frac{14}{15}a<a$ i $0{,}4a+\frac{14}{15}a=1\frac{1}{3}a>a$, więc taki trójkąt istnieje.

Klasa 2. Bryły

Zadanie 1



Zadanie 2
Każda krawędź tej bryły powstaje z połączenia dwóch boków trójkątów, więc bryła ta ma $\frac{20\cdot 3}{2} = 30$ krawędzi.
Każdy wierzchołek tej bryły jest utworzony z co najmniej trzech wierzchołków trójkątów. Wszystkich wierzchołków w 20 trójkątach jest 60, więc bryła ma nie więcej niż $\frac{60}{3} = 20$ wierzchołków.

Zadanie 3
Każdą siatkę można utworzyć w następujący sposób. Dwa kwadraty (ściany sześcianu) łączymy wzdłuż boku, wyznaczając w ten sposób jedną krawędź sześcianu. Po odpowiednim dołączeniu pozostałych kwadratów powstają kolejne krawędzie. Na siatce mamy 5 gotowych krawędzi. Pozostałych 7 krawędzi powstanie ze złączenia „zewnętrznych" boków tych kwadratów. Takich boków jest więc $7 \cdot 2 = 14$ i stanowią one obwód siatki.

Zadanie 4
Bryła $ABCDWXYZ$ to graniastosłup czworokątny. Podstawą tego graniastosłupa jest trapez prostokątny o polu 100. Objętość graniastosłupa wynosi 1000.

Zadanie 5
Oznaczmy: a – krawędź sześcianu. Wówczas: $|IJ| = a$, $|AJ| = |IH| = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, $|JH| = \frac{\sqrt{6}}{2}a$.

$P_{\Delta IHJ} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{2}}{4}a^2$ $\qquad$ $P_{\Delta AJH} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}a = \frac{\sqrt{12}}{4}a^2$

Zatem pole trójkąta IHJ jest mniejsze od pola trójkąta AJH.

Zadanie 6
Oznaczmy przez a, b, c długości krawędzi prostopadłościanu i przyjmijmy, że $a < b < c$. Wówczas mamy: $ab < ac < bc$ oraz $\frac{ac}{ab} = 2$ i $\frac{bc}{ab} = 3$, skąd otrzymujemy $b = \frac{1}{2}c$ i $a = \frac{1}{3}c$.

$4 \cdot \left(c + \frac{1}{2}c + \frac{1}{3}c\right) = 33 \qquad c = 4{,}5$

$V = c \cdot \frac{1}{2}c \cdot \frac{1}{3}c \cdot \frac{1}{6}c^3 \qquad V = 15\frac{3}{16}$ [cm^3]

Zadanie 7
Trójkąt, który przedstawiono na rys. 2, uniemożliwia sklejenie części bryły z rys. 1 wyznaczonej przez pięć kwadratów.

Zadanie 8
Na każdej kostce najmniejsza suma oczek na trzech widocznych ściankach wynosi 6, więc nie można ułożyć sześcianu z 8 kostek do gry w taki sposób, by suma oczek na wszystkich widocznych ściankach była równa 46.

Zadanie 9
17 przekątnych

Zadanie 10
Punktami najdalej położonymi od A i leżącymi na ścianach o wspólnym wierzchołku A są C, F i H, ale $|AC| = |AF| = |AH| = 2\sqrt{2} < 3$. Niech punkt X leży na krawędzi GH i $|AX| = 3$. Wówczas: $|HX|^2 = |AX|^2 - |AH|^2 = 3^2 - (2\sqrt{2})^2 = 1$, czyli $|HX| = 1$, więc punkt X jest środkiem krawędzi GH. Analogiczną własność mają środki krawędzi CG i FG. Zatem są trzy punkty spełniające warunki zadania.

Klasa 3. Graniastosłupy i ostrosłupy

Zadanie 1

	Krawędź	Pole powierzchni	Objętość
Sześcian nr 1	a	$6a^2$	a^3
Sześcian nr 2	$\frac{\sqrt{6P}}{6}$	P	$\frac{P\sqrt{6P}}{36}$
Sześcian nr 3	$\sqrt[3]{V}$	$6\sqrt[3]{V^2}$	V

Zadanie 2

Niech podstawą ostrosłupa będzie n-kąt, a graniastosłupa k-kąt, gdzie n, k – liczby naturalne większe od 2. Wówczas:

	Ostrosłup	Graniastosłup
Liczba wierzchołków	$n+1$	$2k$
Liczba krawędzi	$2n$	$3k$
Liczba ścian	$n+1$	$k+2$

Mamy zatem: $\begin{cases} 3k - 2n = 18 \\ 2k - n - 1 = 18 \end{cases}$

Stąd $k = 20$ i $n = 21$. Wtedy $n + 1 = 22$ oraz $k + 2 = 22$. Bryły mają więc po tyle samo ścian.

Zadanie 3

Wysokość górnego walca jest równa:

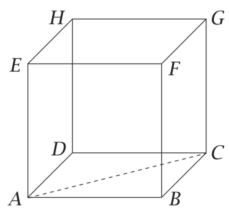
$\sqrt{H^2 - r^2} = \sqrt{H^2 - (0{,}6H)^2} = 0{,}8H$

$V_g = \pi r^2 \cdot 0{,}8H$

$V_d = \pi r^2 \cdot 0{,}2H$

Zatem: $\frac{V_g}{V_d} = \frac{0{,}8}{0{,}2} = 4$.

Zadanie 4

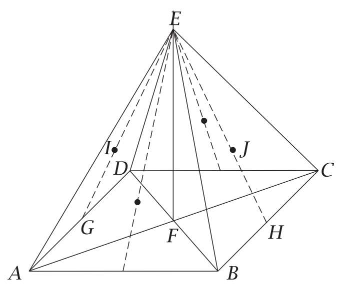


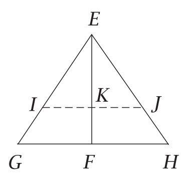
Niech wybraną przekątną będzie AC. Wówczas przekątną sześcianu, która nie ma z nią punktu wspólnego, jest BH lub DF.

Z dokładnością do symetrii przyjmijmy, że czworościanem opisanym w zadaniu jest $ABCH$. Objętość tej bryły jest równa:

$V = \frac{1}{3} \cdot P_{ABC} \cdot |DH| = \frac{1}{6}$

Zadanie 5





Podstawą tak wyznaczonego ostrosłupa jest czworokąt o równych i prostopadłych przekątnych. W trójkącie GHE mamy:

$|GH| = 1, \quad |EG| = |EH| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Trójkąty prostokątne EFH i EKJ są podobne w skali $\frac{2}{3}$, więc $|KJ| = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

Pole podstawy małego ostrosłupa jest równe $P_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$.

Wysokość tego ostrosłupa stanowi $\frac{1}{3}$ odcinka EF, czyli

$h = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{6}$

Szukana objętość jest równa: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{81}$

Zadanie 6

Oznaczmy: a – długość krawędzi podstawy graniastosłupa.

W trójkącie FDP mamy $|\sphericalangle FDP| = 90^\circ$ oraz $|FP|^2 = \left(a\sqrt{3}\right)^2 + a^2 = 4a^2$, czyli $|FP| = 2a$. Łatwo zauważyć, że $|\sphericalangle DFP| = 30^\circ$, $|\sphericalangle LFP| = |\sphericalangle PLF| = 60^\circ$. Stąd: $|\sphericalangle FPL| = 180^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ$.

Zadanie 7

Oznaczmy: a – krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, h – wysokość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego. Wtedy:

$8a + 4h = 120$
$h = 30 - 2a$
$V_4 = a^4 h = 30a^2 - 2a^3$

Oznaczmy: c – krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, H – wysokość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego. Wtedy:

$6c + 3H = 90$
$H = 30 - 2c$
$V_3 = \frac{c^2\sqrt{3}}{4} \cdot (30 - 2c) = \frac{\sqrt{3}}{4}(30c^2 - 2c^3)$

Jeśli $0 < c < 15$, to największą wartością wyrażenia V_4 jest 1000. Ponieważ $0 < c < 15$, więc największa wartość wyrażenia V_3 jest równa $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1000 = 250\sqrt{3}$ cm^3.

Zadanie 8

Oznaczmy bok trójkąta przez x. Wówczas:

$S_{AB} = \pi \cdot x^2$
$S_{BC} = \pi \cdot \frac{1}{2}x \cdot x = \frac{1}{2}\pi x^2$
$S_{AC} = \pi \cdot x \cdot 2x - \pi \cdot \frac{1}{2}x \cdot x = 1{,}5\pi x^2$

Zatem $S_{AB} + S_{BC} = S_{AC}$.

Zadanie 9

Niech promień kuli będzie równy R. Oznaczmy: r – promień podstawy walca, H – wysokość walca. Wtedy:

$H^2 + (2r)^2 = (2R)^2$
$H^2 = 4R^2 - 4r^2$
$H = 2\sqrt{R^2 - r^2}$
$P_{bw} = 2\pi rH = 4\pi r\sqrt{R^2 - r^2}$
$P_k = 4\pi \cdot R^2$
$\frac{P_k}{P_{bw}} = \frac{4\pi R^2}{4\pi r\sqrt{R^2-r^2}} = \frac{R^2}{r\sqrt{R^2-r^2}}$

Przypuśćmy, że: $\frac{R^2}{r\sqrt{R^2-r^2}} < 2$. Wtedy:

$R^2 < 2r\sqrt{R^2 - r^2}$
$R^2 < 4r^2(R^2 - r^2)$
$4r^4 - 4r^2R^2 + R^2 < 0$
$(2r^2 - R)^2 < 0$

Otrzymana nierówność jest sprzeczna, co oznacza, że $\frac{P_k}{P_{bw}} \geqslant 2$, czyli $P_{bw} \leqslant \frac{1}{2}P_k$.

Zadanie 10

Oznaczmy: a – długość boku trójkąta.

Obracający się trójkąt tworzy dwa stożki o wspólnej podstawie i takiej samej wysokości równej $\frac{a}{2}$. Promień podstawy stożka jest równy $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Zatem objętość bryły wynosi:

$2 \cdot \frac{a}{2}\pi \cdot \cdot \frac{a}{2} = \frac{\pi}{4}a^3$

Pole trójkąta, który się obraca, jest równe $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Odległość punktu, w którym przecinają się środkowe tego trójkąta, od osi obrotu wynosi: $\frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Mamy: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2\pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{\pi}{4}a^3$.